APOSTILA

MECÂNICA APLICADA

UniEVANGÉLICA
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Profº Me. Eduardo M. Toledo

Centro Universitário de Anápolis - UniEVANGÉLICA

Associação Educativa Evangélica
Conselho de Administração
Presidente – Ernei de Oliveira Pina
1º Vice-Presidente – Cicílio Alves de Moraes
2º Vice-Presidente – Ivan Gonçalves da Rocha
1º Secretário – Geraldo Henrique Ferreira Espíndola
2º Secretário – Francisco Barbosa de Alencar
1º Tesoureiro – Augusto César Rocha Ventura
2º Tesoureiro – Djalma Maciel de Lima

Centro Universitário de Anápolis
Chanceler
Ernei de Oliveira Pina
Reitor
Carlos Hassel Mendes da Silva
Pró-Reitora Acadêmica
Cristiane Martins Rodrigues Bernardes
Pró-Reitor de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Ação Comunitária
Sandro Dutra e Silva

Equipe Editorial
Núcleo Docente Estruturante do Curso de Engenharia Civil
Rogerio Santos Cardoso – Diretor
Ana Lúcia Carrijo Adorno – Coordenadora Pedagógica
Agnaldo Antônio Moreira Teodoro da Silva
Eduardo Martins Toledo
Kíria Nery Alves do Espírito Santos Gomes

ASSOCIAÇÃO EDUCATIVA EVANGÉLICA
UniEVANGÉLICA

ENGENHARIA CIVIL

Prefácio

Esta apostila é composta por por notas de aula, exemplos, exercícios resolvidos e uma pequena coletânea de problemas do conteúdo ***Mecânica Vetorial – Estática***. A mesma está dividida em 10 capítulos: *estática de partículas, sistemas equivalentes de forças em corpos rígidos, equilíbrio de corpos rígidos*, *forças distribuídas: centroides e centro de gravidade (baricentro)*, *forças distribuídas: momentos de inercia, análise de estruturas: treliças, vigas, pórticos, atrito* e *método do trabalho virtual*. Os exercícios aqui propostos aqui, não são originais, porém foram cuidadosamente selecionados para maior compreensão do conteúdo. Esta apostila ainda está em construção, portanto, é bem-vinda à colaboração de quem queira enviar sugestões e correções para o aprimoramento e melhoria deste material.

Prof. Me. Eduardo Martins Toledo (eduardomtoledo@gmail.com)
2018/2

Índice

Capítulo 1 - Estática de Partículas

TEORIA (NOTAS DE AULA)

1. Introdução

Neste capítulo estudaremos o efeito de forças que atuam sobre partículas. O uso da palavra partícula significa que o tamanho e o formato dos corpos não serão considerados na resolução dos problemas.

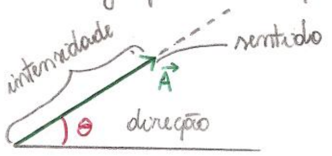
2. Escalares e Vetores

Escalar

É uma quantidade física positiva ou negativa que pode ser completamente descrita por sua intensidade (ex.: massa, temperatura)

Vetor

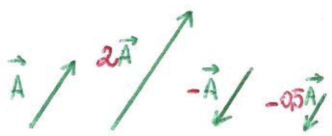
É uma quantidade física que necessitam de intensidade, direção e sentido para completa descrição (ex.: força). O vetor é representado graficamente por uma seta.



3. Operações Vetoriais

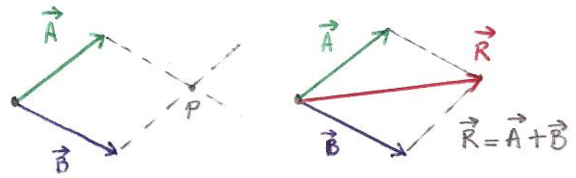
Multiplicação e Divisão de um número por um Escalar

A multiplicação e divisão de um vetor por um escalar mudará apelas apenas a intensidade do vetor, no caso de um escalar positivo e a intensidade e o sentido, se o escalar for negativo.

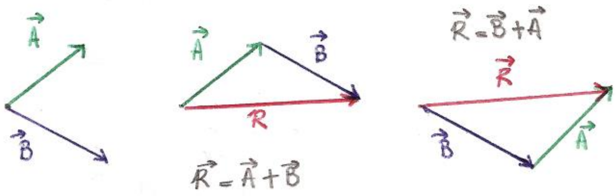


Adição de Vetores

A adição de vetores obedecem a lei do paralelogramo. Veja a soma de $\vec{A}$ e $\vec{B}$:

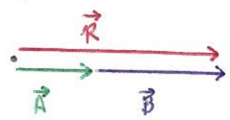


Também podemos somar $\vec{A}$ e $\vec{B}$ utilizando a regra do triângulo. Esta regra é caracterizada pela disposição dos vetores no padrão "ponta-a-cauda".



*A adição de vetores é comutativa.

No caso onde temos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ colineares, a adição é feita através da algebra comum.

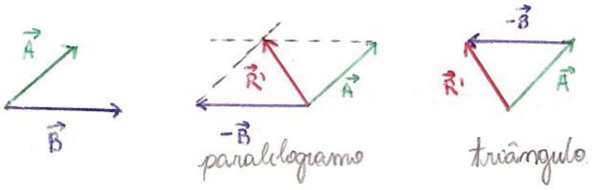


$$R = A + B$$

Subtração de Vetor

A subtração é definida como um caso especial da adição, onde:

$$\vec{R}' = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

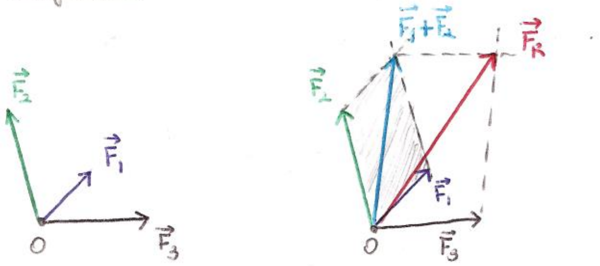


4. Adição Vetoriais de Forças

A força é uma quantidade vetorial. Assim, a adição é feita de acordo com a lei do paralelogramo. O vetor resultante da adição de duas ou mais forças é denominada <u>força resultante</u>.

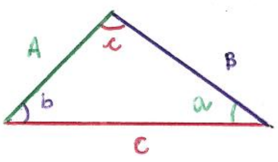
Adição de Várias Forças

Para soma mais de duas forças, aplicamos sucessivamente a <u>lei do paralelogramo</u>.



Lei dos Senos e Cossenos

Utilizando a lei do paralelogramo e depois a regra do triângulo, obtemos:



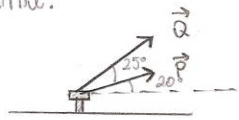
LEI DOS COSSENOS:

$$\boxed{C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2A \cdot B \cdot \cos c}}$$

LEI DOS SENOS:

$$\boxed{\frac{A}{\operatorname{sen} a} = \frac{B}{\operatorname{sen} B} = \frac{C}{\operatorname{sen} c}}$$

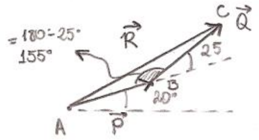
<u>Exemplo 1</u>. As duas forças $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ atuam sobre um parafuso A. Determine sua resultante.



$Q = 60\ N$

$P = 40\ N$

Aplicando a regra do triângulo:



4 alg → começam com "1" 3 alg → outros casos

Aplicando a lei dos cossenos:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2 \cdot P \cdot Q \cdot \cos 155°}$$

$$R = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cos 155°}$$

$$\boxed{R = 97{,}73\ N}$$

Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{R}{\operatorname{sen} B} = \frac{Q}{\operatorname{sen} A} \rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{60 \operatorname{sen} 155°}{97{,}73}$$

$$\frac{97{,}73}{\operatorname{sen} 155°} = \frac{60}{\operatorname{sen} A} \qquad A = 15{,}04°$$

$$\therefore\ \alpha = 20° + 15{,}04 = \boxed{35{,}04°}$$

Com 3 algarismos $\rightarrow \vec{R} = 97{,}7\ N \measuredangle 35{,}0°$

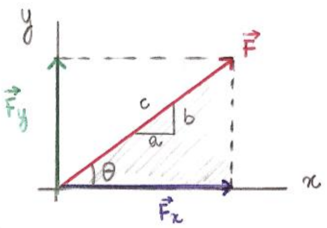
---

5. Componentes Retangulares de um Força

Quando decompomos uma força ao longo dos eixos x e y, as componentes são chamadas de <u>componentes retangulares</u>.

Notação Escalar

As componentes de uma força são determinadas usando a <u>lei do paralelogramo</u>.

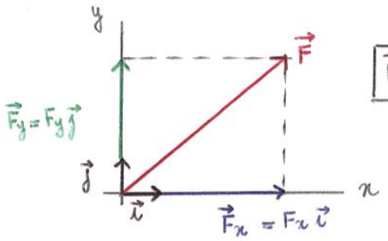


Assim:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_x = F \cdot \cos\theta \\ F_y = F \operatorname{sen}\theta \end{array}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{array}{l} F_x = F\left(\frac{a}{c}\right) \\ F_y = F\left(\frac{b}{c}\right) \end{array}}$$

Notação Vetorial Cartesiana

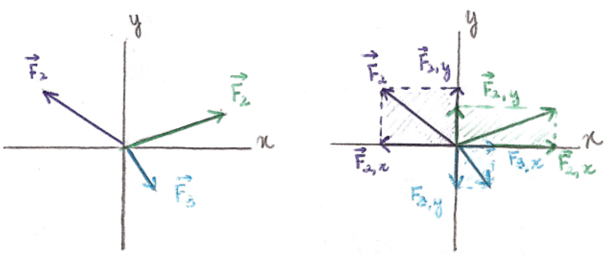
Também podemos representar as componentes x e y da força em termos dos vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

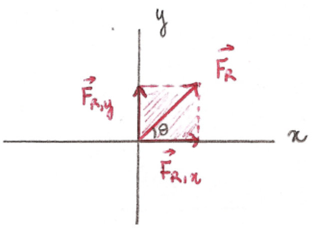


$$\boxed{\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}}$$

6. Resultante das Forças pelas somas das Componentes

Quando temos três ou mais forças, cada força é decomposta em suas componentes x e y, e as respectivas componentes são somadas utilizando a álgebra comum.



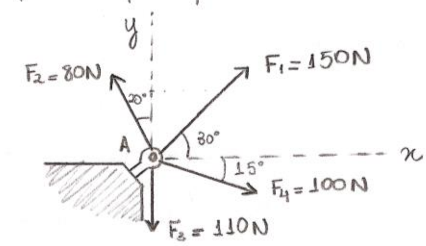


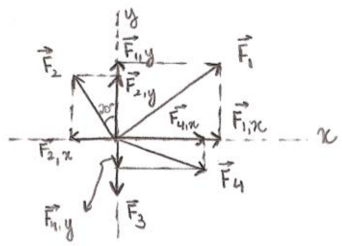
$$\boxed{F_{R,x} = \Sigma F_x} \quad \text{e} \quad \boxed{F_{R,y} = \Sigma F_y}$$

$$\boxed{F_R = \sqrt{F_{R,x}^2 + F_{R,y}^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\theta = tg^{-1}\left|\frac{F_{R,y}}{F_{R,x}}\right|}$$

↳ direção

Exemplo 2: Determine a resultante das forças no parafuso.





Força	Intensidade	x	y
F_1	150	+129,9	+75,0
F_2	80	−27,4	+75,2
F_3	110	0	−110,0
F_4	100	+96,6	−25,9
		$F_{R,x}$ = +199,1	$F_{R,y}$ = +14,3

$$\therefore \vec{F_R} = F_{R,x}\vec{i} + F_{R,y}\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{F_R} = (199{,}1\ N)\vec{i} + (14{,}3\ N)\vec{j}}$$

Direção:

$$\theta = tg^{-1}\left|\frac{F_{R,y}}{F_{R,x}}\right| \rightarrow \boxed{\theta = 4{,}1°}$$

Intensidade:

$$F_R = \sqrt{F_{R,x}^2 + F_{R,y}^2} = \sqrt{(199,1)^2 + (14,3)^2}$$

$$\boxed{F_R = 199,6\ N}$$

$$\boxed{\vec{F}_R = 199,6\ N \quad \angle\ 4,1°}$$

7. Equilíbrio de Partícula

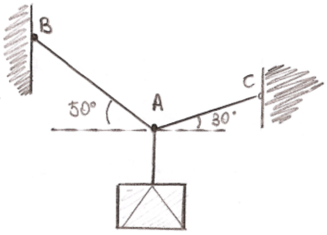
Quando a resultante de todas as forças que atuam no sistema é igual a zero a partícula está em equilíbrio.

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = 0}$$

em x e y:

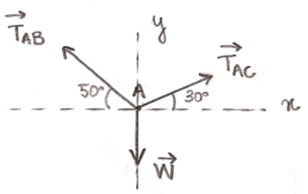
$$\boxed{\Sigma F_x = 0 \quad e \quad \Sigma F_y = 0}$$

Exemplo 3. Determine a tração das cordas AB e AC se o caixote tem massa 75Kg.

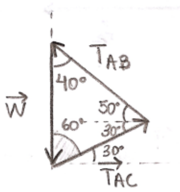


$g = 9,81\ m/s^2$

· Diagrama de corpo livre (DCL):



· Triângulo de força:



· Lei dos senos:

$$\frac{T_{AB}}{sen\,60°} = \frac{W}{sen\,80°} \qquad T_{AB} = \frac{W \cdot sen\,60°}{sen\,80°} \rightarrow T_{AB} = \frac{75 \cdot 9,81 \cdot sen\,60°}{sen\,80°}$$

$$\boxed{T_{AB} = 647\ N}$$

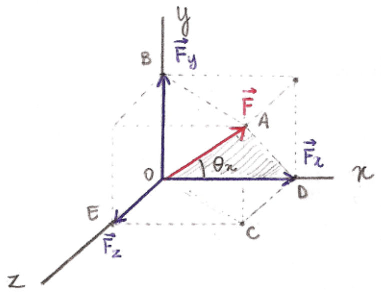
$$\frac{T_{AC}}{sen\,40°} = \frac{W}{sen\,80°} \rightarrow T_{AC} = \frac{W \cdot sen\,40°}{sen\,80°}$$

$$\boxed{T_{AC} = 480\ N}$$

*Quando a partícula está em equilíbrio sob ação de 3 forças o problema pode ser resolvido desenhando-se o triângulo de forças.

8. Componentes de Força Retangular no Espaço

Agora vamos considerar três componentes retangulares x, y e z.



A intensidade de $\vec{F}$ é dado por:

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

A relação entre $\vec{F}$ e suas três componentes F_x, F_y e F_z:

$$\boxed{F_x = F\cos\theta_x \ ; \quad F_y = F\cos\theta_y \quad e \quad F_z = F\cos\theta_z} \quad (1)$$

*O cosseno dos ângulos θ_x, θ_y e θ_z, são conhecidos como cossenos diretores de $\vec{F}$.

Podemos reescrever $\vec{F}$ em termos dos vetores unitários:

$$\boxed{\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}} \quad (2)$$

Subst. (1) em (2), obtemos:

$$\vec{F} = F(\cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}) \quad (3)$$

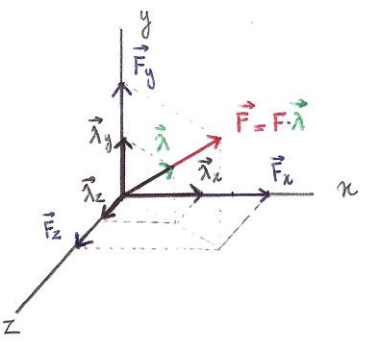
A eq. (3) mostra que a força pode ser escrita como produto escalar de F com o vetor

$$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\theta_x}_{\vec{\lambda}_x} \vec{i} + \underbrace{\cos\theta_y}_{\vec{\lambda}_y} \vec{j} + \underbrace{\cos\theta_z}_{\vec{\lambda}_z} \vec{k}$$

onde $\vec{\lambda}$ é denominado vetor unitário ao longo da linha de ação de $\vec{F}$.

Realizando algumas operações matemáticas, obtemos:

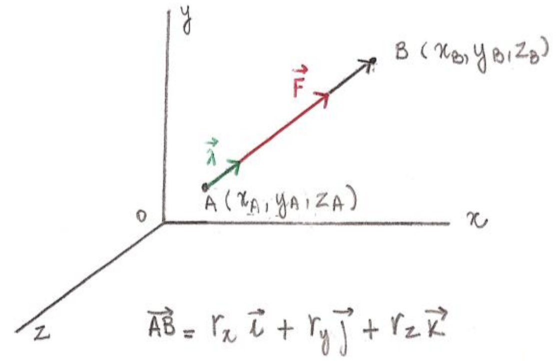
$$\boxed{\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1}$$



* $\vec{\lambda}$ é o vetor cuja intensidade é igual 1 e cuja a direção e o sentido são os mesmos de $\vec{F}$.

9. Vetor Força Orientado ao longo de uma reta

Em muitos problemas de estática tridimensional é definida pela coordenada de dois pontos pelos quais passa sua linha de ação.



$$\vec{AB} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

O vetor $\vec{AB}$ é conhecido como vetor posição e é representado pelas suas componentes r_x, r_y e r_z:

$$\vec{AB} = \vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

onde:

$$r_x = (x_B - x_A)$$
$$r_y = (y_B - y_A)$$
$$r_z = (z_B - z_A)$$

O vetor unitário $\vec{\lambda}$ pode ser obtido dividindo-se o vetor $\vec{AB}$ ($= \vec{r}$, vetor posição) por sua intensidade AB ($= r$).

$$\boxed{\lambda = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}(r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k})}$$

Lembrando que $\vec{F}$ é igual ao produto escalar de F e $\vec{\lambda}$, temos:

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = \frac{F}{r}(r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k})$$

Para cada componente:

$$\boxed{F_x = \frac{F r_x}{r} \,, \quad F_y = \frac{F r_y}{r} \quad e \quad F_z = \frac{F r_z}{r}}$$

10. Adição de Forças Concorrentes no Espaço

A adição de forças concorrentes no espaço é realizada somando-se suas componentes retangulares.

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}$$

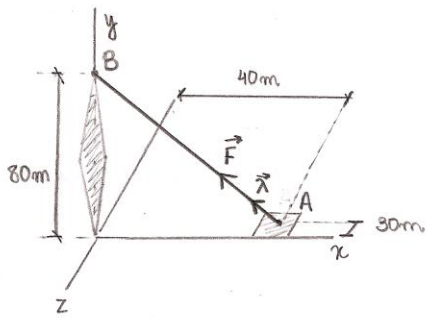
Para cada componente:

$$\boxed{F_{R,x} = \Sigma F_x \,, \quad F_{R,y} = \Sigma F_y \quad e \quad F_{R,z} = \Sigma F_z}$$

A intensidade

$$\boxed{F_R = \sqrt{F_{R,x}^2 + F_{R,y}^2 + F_{R,z}^2}}$$

Exemplo 4. Um cabo de sustentação de uma torre está ancorado por meio de um parafuso em A. A tração no cabo é 2500 N. Determine (a) as componentes F_x, F_y e F_z da força que atua sobre o parafuso e (b) os ângulos θ_x, θ_y e θ_z que definem a direção da força.



$B(x_B, y_B, z_B)$

$A(x_A, y_A, z_A)$

· Componentes do vetor posição

$$r_x = \underset{\text{ponto B}}{x_B} - \underset{\text{ponto A}}{x_A} = 0 - 40 = -40m$$

$$r_y = y_B - y_A = 80 - 0 = +80m$$

$$r_z = z_B - z_A = 0 - (-30) = +30m$$

· Vetor posição

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = -40\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}$$

· Intensidade do vetor posição

$$AB = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{(40)^2 + (80)^2 + (30)^2}$$

$$r = 94{,}3 \, m$$

· Componentes da força

$$F_x = F\frac{r_x}{r} = \frac{2500 \cdot (-40)}{94{,}3} = \boxed{-1060 \text{ N}}$$

$$F_y = F\frac{r_y}{r} = \frac{2500 \cdot (80)}{94{,}3} = \boxed{2121 \text{ N}}$$

$$F_z = F\frac{r_z}{r} = \frac{2500 \, (30)}{94{,}3} = \boxed{795 \text{ N}}$$

· Direção da força

$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = -\frac{1060}{2500} \longrightarrow \boxed{\theta_x = 115{,}1°}$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{2121}{2500} \longrightarrow \boxed{\theta_y = 32{,}0°}$$

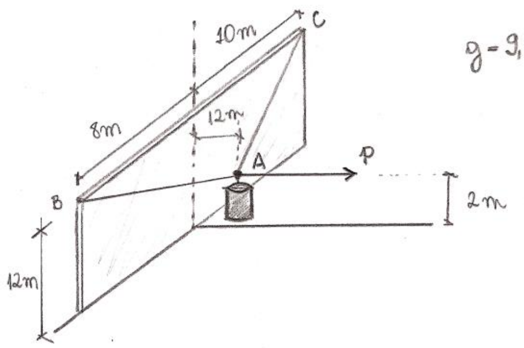
$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{795}{2500} \longrightarrow \boxed{\theta_z = 71{,}5°}$$

11. Equilíbrio de uma Partícula no Espaço

Uma partícula estará em equilíbrio no espaço quando a força resultante for igual a zero. Assim:

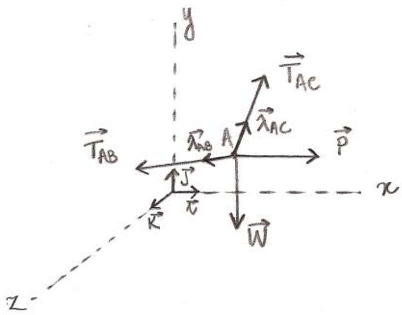
$$\boxed{\Sigma F_x = 0 \,, \quad \Sigma F_y = 0 \quad e \quad \Sigma F_z = 0}$$

Exemplo 5: Um cilindro de 200kg está pendurado por meio de dois cabos AB e AC, presos ao topo de uma parede vertical. Uma vertical $\vec{P}$ perpendicular a parede segura o cilindro na posição mostrada. Determine a intensidade de $\vec{P}$ e a tração em cada cabo.



$g = 9,81\,m/s^2$

· Diagrama de corpo livre



· Decompondo cada força em componentes retangulares

$$\vec{P} = P\vec{i}$$

$$\vec{W} = W\vec{j} = -(200 \cdot 9,81)\vec{j} = -(1962\,N)\vec{j}$$

· Para as forças T_{AC} e T_{AB} é preciso primeiro determinar os vetores unitários $\vec{\lambda}_{AC}$ e $\vec{\lambda}_{AB}$. Para determinar os vetores unitários precisamos do vetor posição e de sua intensidade.

$A\,(1,2;\ 2;\ 0)$; $B(0;\ 12;\ 8)$ e $C(0;\ 12;\ -10)$

$$\vec{AB} = \vec{r}_{AB} = (0-1,2)\vec{i} + (12-2)\vec{j} + (8-0)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = -1,2\,\vec{i} + 10\,\vec{j} + 8\,\vec{k}$$

$$r_{AB} = \sqrt{(-1,2)^2 + (10)^2 + (8)^2} = 12,862\,m$$

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = -0,09330\vec{i} + 0,7775\vec{j} + 0,6220\vec{k}$$

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$$

$$\vec{T}_{AB} = -0,09330\,T_{AB}\,\vec{i} + 0,7775\,T_{AB}\vec{j} + 0,6220\,T_{AB}\vec{k}$$

· p/ $\vec{T}_{AC}$:

$$\vec{AC} = \vec{r}_{AC} = (0-1,2)\vec{i} + (12-2)\vec{j} + (-10-0)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AC} = -1,2\vec{i} + 10\vec{j} - 10\vec{k}$$

$$r_{AC} = \sqrt{(-1,2)^2 + (10)^2 + (-10)^2} = 14,193\,m$$

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = -0,08455\,\vec{i} + 0,7046\vec{j} - 0,7046\vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \cdot \vec{\lambda}_{AC}$$

$$\vec{T}_{AC} = -0,08455\,T_{AC}\vec{i} + 0,7046\,T_{AC}\vec{j} - 0,7046\,T_{AC}\,\vec{k}$$

· Aplicando a condição de equilíbrio

$$\Sigma \vec{F} = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$P - 0,09330\,T_{AB} - 0,08455\,T_{AC} = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$-1962 + 0,7775\,T_{AB} + 0,7046\,T_{AC} = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_z = 0$$

$$0,6220\,T_{AB} - 0,7046\,T_{AC} = 0 \quad (3)$$

$0{,}7046T_{AC} = 0{,}6220T_{AB}$ (4)

· Subst. (4) em (2):

$-1962 + 0{,}7775\,T_{AB} + 0{,}6220T_{AB} = 0$

$1{,}3995\,T_{AB} = 1962$

$\boxed{T_{AB} = 1402\ N}$

· Subst. T_{AB} em (4), temos:

$T_{AC} = \frac{0{,}6220 \cdot T_{AB}}{0{,}7046} = \frac{0{,}6220}{0{,}7046} \cdot 1402$

$\boxed{T_{AC} = 1238\ N}$

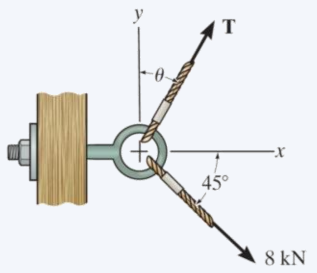
· Subst. T_{AB} e T_{AC} em (1)

$P - 0{,}09330 \cdot (1402) - 0{,}08455 \cdot (1238) = 0$

$\boxed{P = 235\ N}$

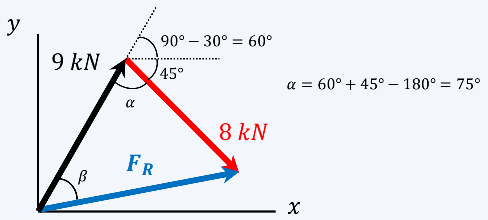
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine a intensidade e a direção (medida no sentido ainti-horário a partir do eixo x positivo) da força resultante que age sobre o pino. A força $T = 9\ kN$ e o ângulo $\theta = 30°$.



Resolução pela Regra do Triângulo

- Aplicando a Regra do Triângulo:



- Aplicando Lei dos Cossenos:

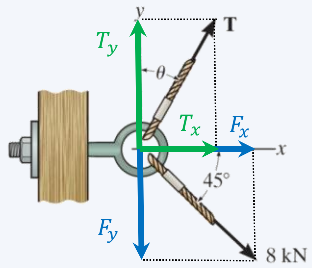
$$F_R = \sqrt{9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cos 75°}$$
$$= 10{,}379$$
$$\boldsymbol{F_R = 10{,}38\ kN} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Aplicando Lei dos Senos:

$$\frac{F_R}{sen\ \alpha} = \frac{8}{sen\ \beta}$$
$$\frac{10{,}379}{sen\ 75°} = \frac{8}{sen\ \beta}$$
$$sen\ \beta = \frac{8 \cdot sen\ 75°}{10{,}379}$$
$$\beta = sen^{-1}\left(\frac{8 \cdot sen\ 75°}{10{,}379}\right) = 48{,}118°$$
$$\therefore\ \phi = 60° - \beta = 60° - 48{,}118°$$
$$\boldsymbol{\phi = 11{,}88°} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

Resolução por Decomposição de Vetores

- Decompondo as Forças:



- Cálculo de T_x e T_y:

$$T_x = T \cdot sen\theta = 9 \cdot sen(30°) = 4{,}500\ kN$$
$$T_y = T \cdot cos\theta = 9 \cdot cos(30°) = 7{,}794\ kN$$

- Cálculo de F_x e F_y:

$$F_x = F \cdot cos\theta = 8 \cdot cos(45°) = 5{,}657\ kN$$
$$F_y = F \cdot sen\theta = 8 \cdot sen(45°) = 5{,}657\ kN$$

- Cálculo de $F_{res,x}$, $F_{res,y}$ e F_R:

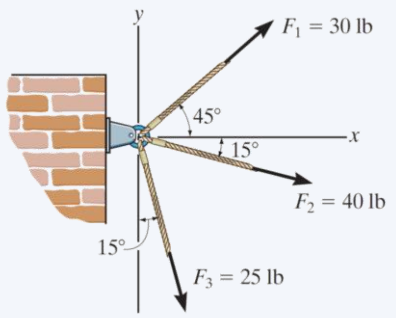
$$F_{res,x} = T_x + F_x = 4{,}500 + 5{,}657 = 10{,}157\ kN$$
$$F_{res,y} = T_y - F_y = 7{,}794 - 5{,}657 = 2{,}137\ kN$$

$$F_R = \sqrt{\left(F_{res,x}\right)^2 + \left(F_{res,y}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(10{,}157\,)^2 + (2{,}137)^2}$$
$$\boldsymbol{F_R = 10{,}379 = 10{,}38\ kN} \quad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

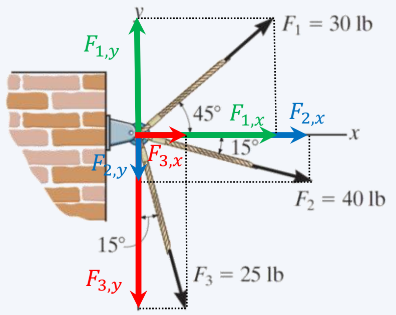
- Cálculo da Direção (ϕ) de F_R:

$$\phi = tg^{-1}\frac{|F_{res,y}|}{|F_{res,x}|} = tg^{-1}\frac{|2{,}137|}{|10{,}157|}$$
$$\boldsymbol{\phi = 11{,}88\,°} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

2. Determine a intensidade e a direção (medida no sentido horário a partir do eixo x positivo) da força resultante que age sobre o pino.



- Decompondo as Forças:



- Cálculo das componentes de F_1, F_2 e F_3:

$$F_{1,x} = F_1 \cdot cos45° = 30 \cdot cos45° = 21{,}213\ lb$$
$$F_{1,y} = F_1 \cdot sen45° = 30 \cdot sen45° = 21{,}213\ lb$$

$$F_{2,x} = F_2 \cdot cos15° = 40 \cdot cos15° = 38{,}637\ lb$$
$$F_{2,y} = F_2 \cdot sen15° = 40 \cdot sen15° = 10{,}353\ lb$$

$$F_{3,x} = F_3 \cdot sen15° = 25 \cdot sen15° = 6{,}470\ lb$$
$$F_{3,y} = F_3 \cdot cos15° = 25 \cdot cos15° = 24{,}148\ lb$$

- Cálculo de $F_{res,x}$, $F_{res,y}$ e F_R:

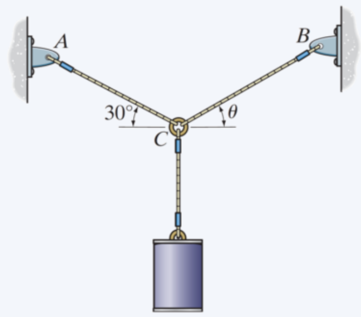
$$F_{res,x} = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x}$$
$$= 21{,}213 + 38{,}637 + 6{,}470 = 66{,}320\ lb$$
$$F_{res,y} = F_{1,y} - F_{2,y} - F_{3,y}$$
$$= 21{,}213 - 10{,}353 - 24{,}148$$
$$= -13{,}288\ lb$$

$$F_R = \sqrt{\left(F_{res,x}\right)^2 + \left(F_{res,y}\right)^2}$$
$$= \sqrt{(66{,}320\ )^2 + (-13{,}288)^2}$$
$$\boldsymbol{F_R = 67{,}638 = 67{,}6\ lb} \quad (\textbf{\textit{RESPOSTA}})$$

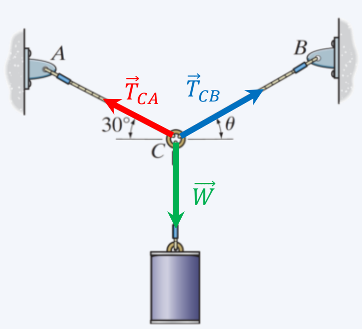
- Cálculo da Direção (ϕ) de F_R:

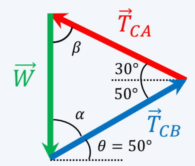
$$\phi = tg^{-1}\frac{|F_{res,y}|}{|F_{res,x}|} = tg^{-1}\frac{|-13{,}288|}{|66{,}320|}$$
$$\boldsymbol{\phi = 11{,}33\ °} \quad (\textbf{\textit{RESPOSTA}})$$

3. Utilizando a regra do triângulo, determine a tração desenvolvida nos cabos CA e CB necessária para o equilíbrio do cilindro de massa igual a 10 kg. Considere $\theta = 50°$.



- Aplicando a Regra do Triângulo:





$\alpha = 90° - 50° = 40°$

$40° + 80 + \beta = 180°$

$\therefore \beta = 60°$

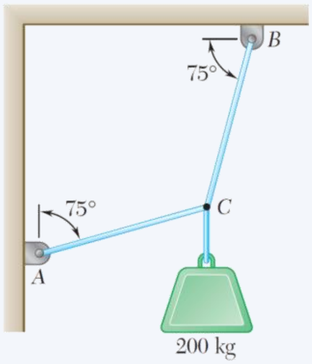
- Aplicando Lei dos Senos:

$$\frac{W}{sen\ 80°} = \frac{T_{CA}}{sen\ 40°} = \frac{T_{CB}}{sen\ 60°}$$

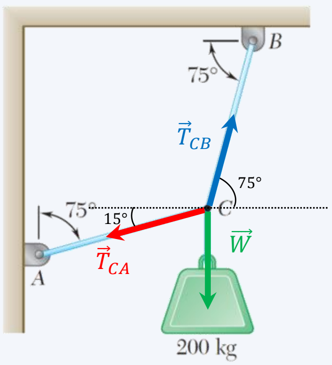
$$\frac{(10 \cdot 9{,}81)}{sen\ 80°} = \frac{T_{CA}}{sen\ 40}$$
$$T_{CA} = \frac{(10 \cdot 9{,}81) \cdot sen\ 40}{sen\ 80°} = 64{,}030$$
$$\boldsymbol{T_{CA} = 67{,}6\ N} \quad (\textbf{\textit{RESPOSTA}})$$

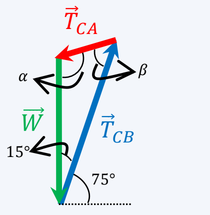
$$\frac{(10 \cdot 9{,}81)}{sen\ 80°} = \frac{T_{CB}}{sen\ 60}$$
$$T_{CB} = \frac{(10 \cdot 9{,}81) \cdot sen\ 60}{sen\ 80°} = 86{,}267$$
$$\boldsymbol{T_{CB} = 86{,}3\ N} \quad (\textbf{\textit{RESPOSTA}})$$

3. Dois cabo estão ligados em C e são carregado tal como mostra a Figura. Determine a tração (a) no cabo AC e (b) no cabo BC.



- Aplicando a Regra do Triângulo:





$\alpha = 90° + 15° = 105°$

$15° + 105° + \beta = 180°$

$\therefore \beta = 60°$

- Aplicando Lei dos Senos:

$$\frac{W}{sen\ 60°} = \frac{T_{CA}}{sen\ 15°} = \frac{T_{CB}}{sen\ 105°}$$

$$\frac{(10 \cdot 9{,}81)}{sen\ 60°} = \frac{T_{CA}}{sen\ 15°}$$

$$T_{CA} = \frac{(10 \cdot 9{,}81) \cdot sen\ 15°}{sen\ 60°} = 586\ N$$

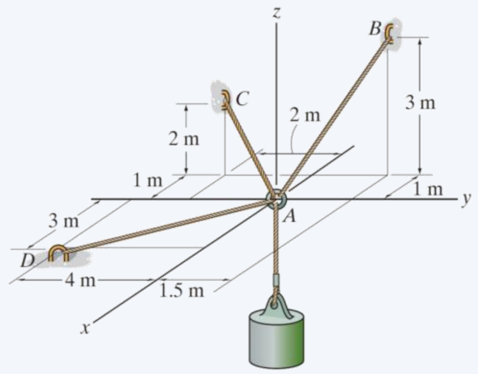
$$\boldsymbol{T_{CA} = 586\ N} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\frac{(10 \cdot 9{,}81)}{sen\ 60°} = \frac{T_{CB}}{sen\ 105°}$$

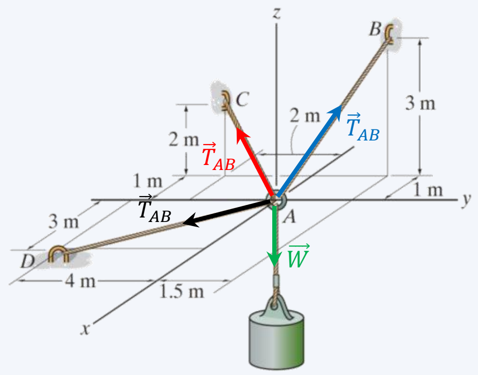
$$T_{CB} = \frac{(10 \cdot 9{,}81) \cdot sen\ 105°}{sen\ 60°} = 2{,}19\ kN$$

$$\boldsymbol{T_{CB} = 2{,}19\ kN} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

4. Determine a tensão nos cabos AB, AC e AD necessária para equilibrar um cilindro de 75 kg.



- DCL:



- Coordenada dos pontos:

$A(0{,}0{,}0)$

$B(-1; 1{,}5; 3)$

$C(-1; -2; 2)$

$D(3; -4; 0)$

- Vetor posição ($\vec{r}$):

$$\vec{r}_{AB} = (-1-0)\vec{\imath} + (1{,}5-0)\vec{\jmath} + (3-0)\vec{k}$$
$$= -1\vec{\imath} + 1{,}5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$
$$\vec{r}_{AC} = (-1-0)\vec{\imath} + (-2-0)\vec{\jmath} + (2-0)\vec{k}$$
$$= -1\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$
$$\vec{r}_{AD} = (-1-0)\vec{\imath} + (1{,}5-0)\vec{\jmath} + (3-0)\vec{k}$$
$$= 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

- Módulo do vetor posição (r):

$$r_{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (1{,}5)^2 + (3)^2} = 3{,}50\ m$$
$$r_{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 3{,}00\ m$$
$$r_{AD} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = 5{,}00\ m$$

- Vetor unitário ($\vec{\lambda}$):

$$\vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-1\vec{\imath} + 1{,}5\vec{\jmath} + 3\vec{k}}{3{,}50}$$
$$= -0{,}286\vec{\imath} + 0{,}428\vec{\jmath} + 0{,}857\vec{k}$$
$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{-1\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}}{3{,}00}$$
$$= -0{,}333\vec{\imath} - 0{,}667\vec{\jmath} + 0{,}667\vec{k}$$
$$\vec{\lambda}_{AD} = \frac{\vec{r}_{AD}}{r_{AD}} = \frac{3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}}{5{,}00}$$
$$= 0{,}600\vec{\imath} - 0{,}800\vec{\jmath} - 0\vec{k}$$

- Vetor Força ($\vec{T}$):

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB} \cdot \vec{\lambda}_{AB}$$
$$= (-0{,}286 \cdot T_{AB})\vec{\imath} + (0{,}428 \cdot T_{AB})\vec{\jmath} + (0{,}857 \cdot T_{AB})\vec{k}$$
$$\vec{T}_{AC} = T_{AC} \cdot \vec{\lambda}_{AC}$$
$$= (-0{,}333 \cdot T_{AC})\vec{\imath} + (-0{,}667 \cdot T_{AC})\vec{\jmath} + (0{,}667 \cdot T_{AC})\vec{k}$$
$$\vec{T}_{AD} = T_{AD} \cdot \vec{\lambda}_{AD}$$
$$= (0{,}600 \cdot T_{AD})\vec{\imath} + (-0{,}800 \cdot T_{AD})\vec{\jmath} + (-0 \cdot T_{AD})\vec{k}$$

- Força Peso ($\vec{W}$):

$$\vec{W} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - (75 \cdot 9{,}81)\vec{k} = -735{,}75\vec{k}$$

- Equilíbrio de Forças:

$$\sum F_x = 0 : -0{,}286 \cdot T_{AB} - 0{,}333 \cdot T_{AC} + 0{,}600 \cdot T_{AD} = 0$$
$$\sum F_y = 0 : 0{,}428 \cdot T_{AB} - 0{,}667 \cdot T_{AC} - 0{,}800 \cdot T_{AD} = 0$$
$$\sum F_z = 0 : 0{,}857 \cdot T_{AB} + 0{,}667 \cdot T_{AC} - 735{,}75 = 0$$

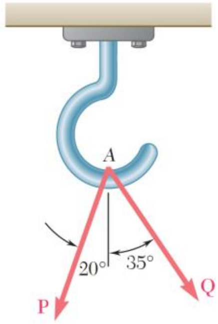
- Resolvendo o Sistema de equações:

$$\boldsymbol{T_{AB} = 831\ N, T_{AC} = 35{,}4\ N \text{ e } T_{AD} = 415\ N}$$

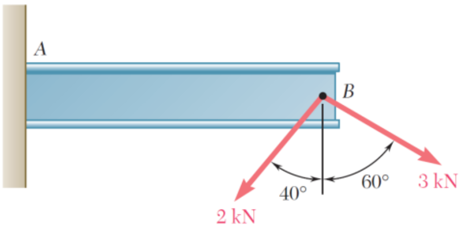
(***RESPOSTA***)

PROBLEMAS

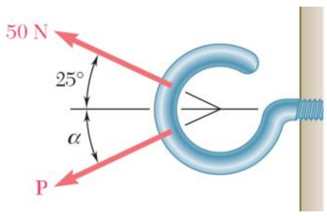
1. Duas forças $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ são aplicadas no ponto A de um suporte tipo gancho, como mostra a Figura. Sabendo que $\boldsymbol{P} = 60\ lb$ e $\boldsymbol{Q} = 25\ lb$, determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando a regra do triângulo.



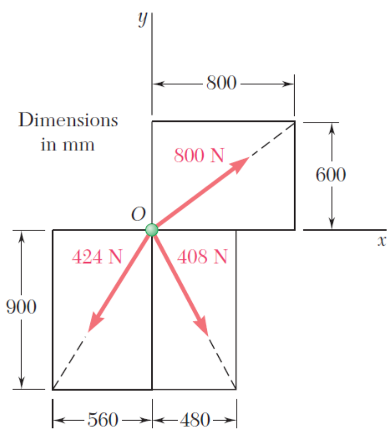
2. Duas forças são aplicadas no ponto $\boldsymbol{B}$ da viga $\boldsymbol{AB}$. Determine a intensidade, a direção e o sentido da resultante usando a regra do triângulo.



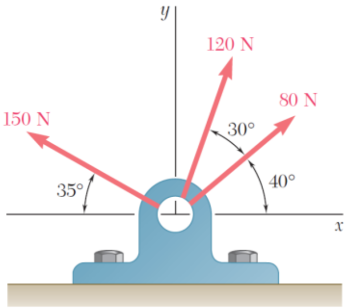
3. Duas forças são aplicadas, como mostra a Figura, a um suporte tipo gancho. Usando trigonometria e sabendo que a intensidade de $\boldsymbol{P}$ é $35\ N$, determine:*(a)* o ângulo requerido α se a resultante $\boldsymbol{R}$ das duas forças aplicadas no suporte, se for horizontal; *(b)* a correspondente intensidade de $\boldsymbol{R}$.



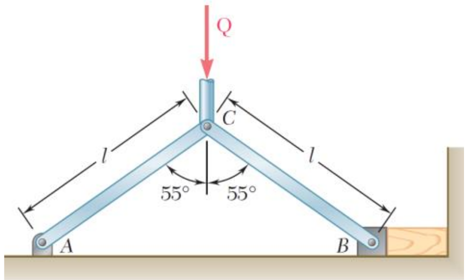
4. Determine as componentes $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de cada uma das forças indicadas.



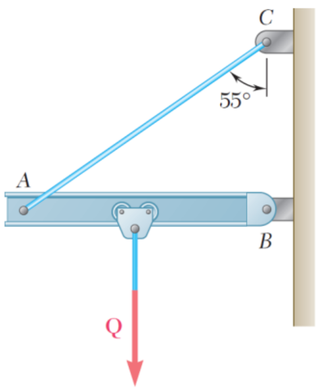
5. Determine as componentes $\boldsymbol{x}$e $\boldsymbol{y}$ de cada uma das forças mostradas.



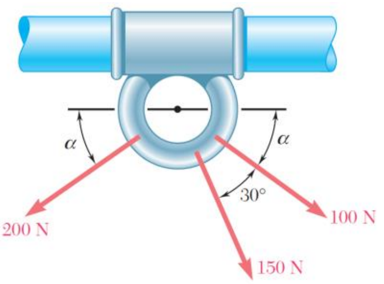
6. O elemento $\boldsymbol{CB}$ de um torno de bancada (morsa) exerce no bloco $\boldsymbol{B}$ uma força $\boldsymbol{P}$ dirigida ao longo da linha $\boldsymbol{CB}$. Sabendo que $\boldsymbol{P}$ deve ter uma componente horizontal de $1200\ N$, determine *(a)* a intensidade da força $\boldsymbol{P}$, e *(b)* a sua componente vertical.



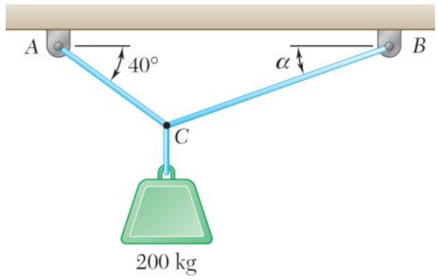
7. Cabo $\boldsymbol{AC}$ exerce sobre a viga $\boldsymbol{AB}$ uma força $\boldsymbol{P}$ dirigida ao longo da linha $\boldsymbol{AC}$. Sabendo que $\boldsymbol{P}$ deve ter uma componente vertical de $350\ lb$, determine:*(a)* a magnitude da força $\boldsymbol{P}$;*(b)*a sua componente horizontal.



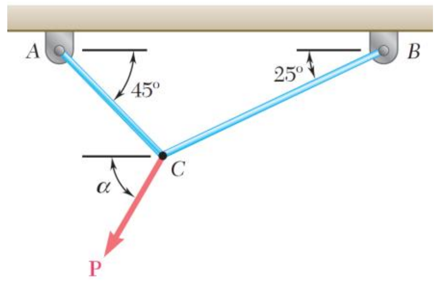
8. Sabendo que $\boldsymbol{\alpha} = 35°$, determine a resultante das forças mostradas.



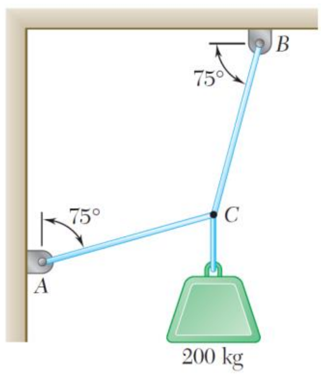
9. Dois cabos estão ligados em $\boldsymbol{C}$ e são carregados, tal como mostra a Figura. Sabendo que $\boldsymbol{\alpha} = 20°$, determine a tração *(a)* no cabo $\boldsymbol{AC}$ e *(b)* no cabo $\boldsymbol{BC}$.



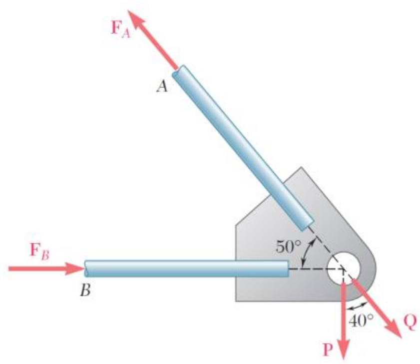
10. Dois cabos estão ligados em $\boldsymbol{C}$ e são carregado tal como mostra a Figura. Sabendo que $\boldsymbol{P} = 500\ N$e $\boldsymbol{\alpha} = 60°$, determine a tração:*(a)* no cabo $\boldsymbol{AC}$ e *(b)* no cabo $\boldsymbol{BC}$.



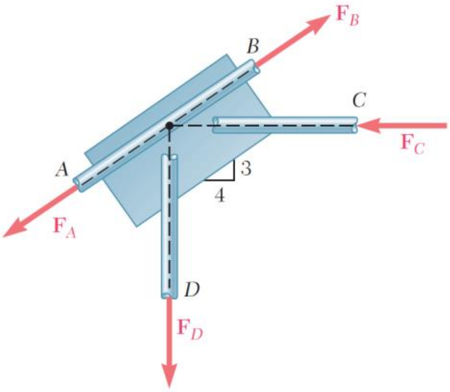
11. Dois cabos estão ligados em $\boldsymbol{C}$ e são carregados, tal como mostra a Figura. Determine a tração:*(a)* no cabo $\boldsymbol{AC}$ e *(b)* no cabo $\boldsymbol{BC}$.



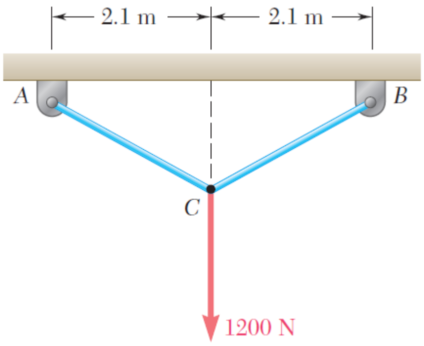
12. Duas forças $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ são aplicados tal como mostra a Figura a conexão de uma aeronave. Sabendo-se que conexão está em equilíbrio e que $\boldsymbol{P} = 500\ lb$ e $\boldsymbol{Q} = 650\ lb$, determine as intensidades das forças exercidas nas hastes $\boldsymbol{A}$e $\boldsymbol{B}$.



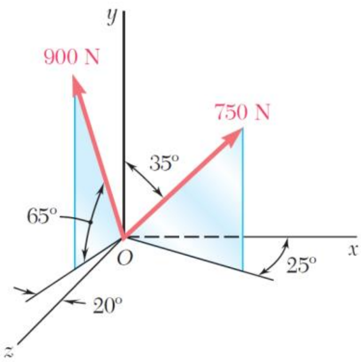
13. A conexão soldada está em equilíbrio, sob a ação das quatro forças mostradas. Sabendo que $\boldsymbol{F_A} = 8\ kN$ e $\boldsymbol{F_B} = 16\ kN$, determine intensidade das outras duas forças, $\boldsymbol{F_C}$ e $\boldsymbol{F_D}$.



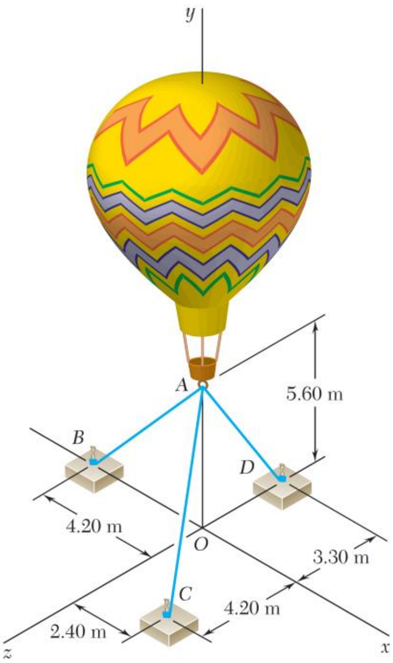
14. Sabendo que as porções $\boldsymbol{AC}$ e $\boldsymbol{BC}$ do cabo $\boldsymbol{ABC}$ devem ser iguais, determine o menor comprimento de cabo que pode ser usado para suportar a carga mostrada se a tração no cabo não puder exceder $870\ N$.



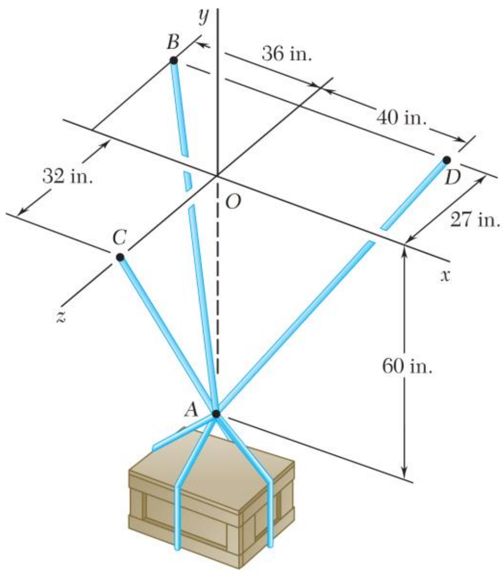
15. Determine: *(a)* as componentes $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ da força de $750\ N$ e *(b)* os ângulos $\boldsymbol{\theta_x}$, $\boldsymbol{\theta_y}$ e $\boldsymbol{\theta_z}$que a força forma com os eixos coordenados.



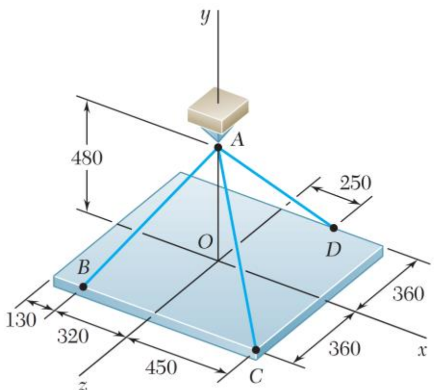
16. Três cabos são usados para amarrar um balão, como mostra a Figura. Determine a força vertical $\boldsymbol{P}$ exercida pelo balão em $\boldsymbol{A}$, sabendo que a tração $\boldsymbol{AB}$ é $259\ N$.



17. Um caixote é sustentado por três cabos, como mostrado na Figura. Determine o peso do caixote, sabendo que a tração no cabo $\boldsymbol{AB}$ é $750\ lb$.



18. Uma placa retangular é sustentada por três cabos, como mostra a Figura. Sabendo que a tração no cabo $\boldsymbol{AC}$ é $60\ N$, determine o peso da placa.



Dimensões em *mm*

RESPOSTAS

1. $\boldsymbol{R} = 77{,}1\ lb\ (\measuredangle\ 85{,}4° \rightarrow com\ sent.negagivo\ de\ x)$.

2. $\boldsymbol{R} = 3{,}30\ kN\ (\measuredangle\ 66{,}6°)$.

3.(a) $\boldsymbol{\alpha} = 37{,}1°$;

(b) $\boldsymbol{R} = 73{,}2\ N$.

4. $Para$:

$\boldsymbol{F} = 800\ N$: $\boldsymbol{F_x} = +640\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = +480\ N$;

$\boldsymbol{F} = 424\ N$: $\boldsymbol{F_x} = -224\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = -360\ N$;

$\boldsymbol{F} = 408\ N$: $\boldsymbol{F_x} = +192{,}0\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = -360\ N$.

5. $Para$:

$\boldsymbol{F} = 80\ N, \boldsymbol{F_x} = 61{,}3\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = 51{,}4\ N$;

$\boldsymbol{F} = 120\ N, \boldsymbol{F_x} = 41{,}0\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = 112{,}8\ N$;

$\boldsymbol{F} = 150\ N, \boldsymbol{F_x} = -112{,}9\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = 86{,}0\ N$.

6. (a) $\boldsymbol{P} = 1465\ N$;

(b) $\boldsymbol{P_y} = 840\ N\ (\downarrow)$.

7. (a) $\boldsymbol{P} = 610\ lb$;

(b) $\boldsymbol{P_x} = 500\ lb (\rightarrow)$.

8. $\boldsymbol{R} = 309\ N (\measuredangle\ 86{,}6° \rightarrow comsent.negativodex)$.

9. (a) $\boldsymbol{T_{AC}} = 2{,}13\ kN$;

(b) $\boldsymbol{T_{BC}} = 1{,}735\ kN$.

10. (a) $\boldsymbol{T_{AC}} = 305\ N$;

(b) $\boldsymbol{T_{BC}} = 514\ N$.

11. (a) $\boldsymbol{T_{AC}} = 586\ N$;

(b) $\boldsymbol{T_{BC}} = 2190\ N$.

12. $\boldsymbol{F_A} = 1303\ lb$ e $\boldsymbol{F_B} = 420\ lb$.

13. $\boldsymbol{F_C} = 6{,}40\ kN$ e $\boldsymbol{F_D} = 480\ kN$.

14. $\boldsymbol{L} = 5{,}80\ m$.

15. (a) $\boldsymbol{F_x} = +390\ N$ e $\boldsymbol{F_y} = +614\ N$ e $\boldsymbol{F_z} = +181{,}8\ N$;

(b) $\boldsymbol{\theta_x} = 58{,}7°$, $\boldsymbol{\theta_y} = 35{,}0°$ e $\boldsymbol{\theta_z} = 76{,}0°$.

16. $\boldsymbol{P} = 1031\ N\ (\uparrow)$.

17. $\boldsymbol{W} = 2100\ lb\ (\downarrow)$.

18. $\boldsymbol{W} = 845\ N\ (\downarrow)$.

Capítulo 2 - Sistemas Equivalentes de Forças em Corpos Rígidos

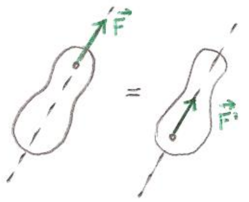
TEORIA (NOTAS DE AULA)

1. Introdução

Neste capítulo estudaremos o efeito de forças exercidas sobre um corpo rígido (corpos que não se deformam) e aprenderemos a substituir um dado sistema de forças por um sistema equivalente mais simples.

2. Princípio da Transmissibilidade

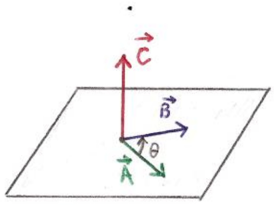
O efeito de uma força externa sobre um corpo rígido permanece inalterado se essa força for movida ao longo de sua linha de ação.



$\vec{F} = \vec{F}'$ (forças equivalentes)

3. Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ produz um vetor $\vec{C}$.



$\boxed{\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}}$

· Intensidade:

$\boxed{C = AB \cdot \text{sen}\,\theta}$

· Direção:

Perpendicular ao plano que contém $\vec{A}$ e $\vec{B}$. A direção é determinada pela regra da mão direita, ou seja, dobrando-se os dedos da mão direita a partir do vetor $\vec{A}$ até $\vec{B}$, o polegar aponta a direção de $\vec{C}$.

· Propriedades:

* Associativa:

$a(\vec{A} \times \vec{B}) = (a\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (a\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})a$

* Distributiva da adição:

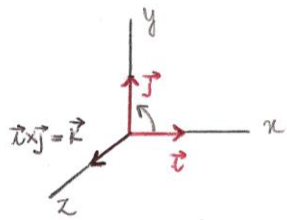
$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{D})$

* A propriedade comutativa não é válida

$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$

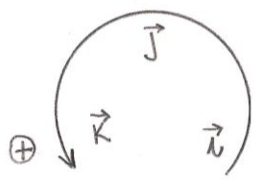
4. Produto Vetorial em Termo das Componentes Retangulares

Vamos determinar agora o produto vetorial de dois vetores unitários quaisquer entre $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.



Para isso, utilizamos a regra da mão direita.

A partir da regra da mão direita, obtemos um esquema simples:



Considerando o produto vetorial entre dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, expressos em termos de componentes retangulares:

$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\times(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

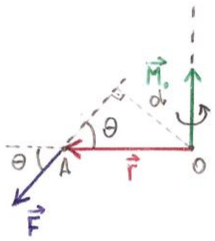
$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{i} + (A_xB_z - A_zB_x)\vec{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{k}$$

A eq. acima pode ser escrita na forma de um determinante.

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

5. Momento de uma Força em relação a um ponto

O momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto O (figura abaixo) é definido vetorialmente como:



$$\boxed{\vec{M}_0 = \vec{F}\times\vec{r}}$$

onde:

$\vec{r}$ = vetor posição, liga o ponto de referência (O) ao ponto de aplicação da força (A).

θ = ângulo entre $\vec{r}$ e a linha da ação da força

· Intensidade:

$$\boxed{M_o = \overbrace{r\,\text{sen}\,\theta}^{=d}\,F = F.d}$$

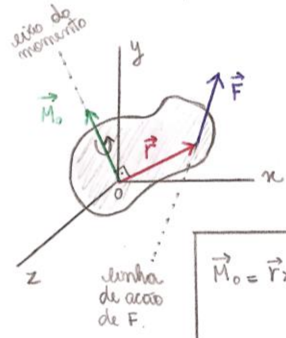
$[M_o]$ = N·m, lb·ft, lb·in

↓ libra vezes pés

↳ libras vezes polegadas.

Componentes Retangulares do Momento de uma Força

Para simplificar a determinação do momento de uma força no espaço, decompomos a força e o vetor posição em componentes retangulares x, y e z.



$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_o = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_o = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$

onde:

r_x, r_y e r_z = componente x, y e z do vetor posição (de O até qualquer ponto da linha de ação de F)

F_x, F_y e F_z = componentes x, y e z do vetor força.

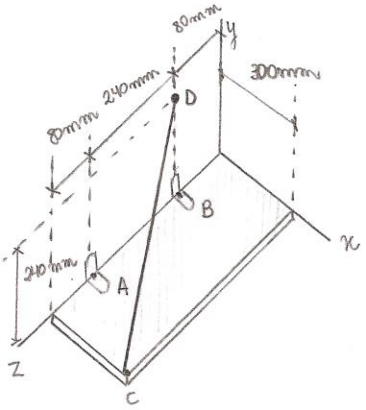
vem.

4.2 MOMENTO RESULTANTE DE UM SISTEMA DE FORÇAS

Se um corpo é submetido a ação de várias forças, o momento resultante é dado por:

$$\boxed{\vec{M}_{R,O} = \Sigma(\vec{r}\times\vec{F})}$$

Exemplo 1. Uma placa retangular é sustentada pelos suportes A e B e por um fio CD. Sabendo que a tração no fio é de 200N, determine o momento em relação a A da força exercida pelo fio no ponto C.



$F = 200\,N$

• Vetor posição $\vec{r}_{AC}$:

$A(\overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0{,}32})$; $C(\overset{x}{0{,}3}; \overset{y}{0}, \overset{z}{0{,}4})$ e $D(\overset{x}{0}, \overset{y}{0{,}24}, \overset{z}{0{,}08})$

$\vec{r}_{AC} = \vec{AC} = (0{,}3-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (0{,}4-0{,}32)\vec{k}$

$\boxed{\vec{r}_{AC} = 0{,}3\vec{i} + 0{,}08\vec{k}}$

• Vetor unitário $\vec{\lambda}_{CD}$:

Para determinar o vetor unitário $\vec{\lambda}_{CD}$ precisamos do vetor posição do fio CD e de sua intensidade.

$\vec{r}_{CD} = \vec{CD} = (0-0{,}3)\vec{i} + (0{,}24-0)\vec{j} + (0{,}08-0{,}4)\vec{k}$

$\vec{r}_{CD} = -0{,}3\vec{i} + 0{,}24\vec{j} - 0{,}32\vec{k}$

$r_{CD} = \sqrt{(0{,}3)^2 + (0{,}24)^2 + (-0{,}32)^2} = 0{,}50\,m$

$\vec{\lambda}_{CD} = \dfrac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}} = -0{,}6\vec{i} + 0{,}48\vec{j} - 0{,}64\vec{k}$

• Determinando o vetor força $\vec{F}$:

$\vec{F} = F\,\lambda_{CD} = 200\,(-0{,}6\vec{i} + 0{,}48\vec{j} - 0{,}64\vec{k})$

$\boxed{\vec{F} = -120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k}}$

• Momento em relação a C.

$$\vec{M}_C = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}08 & 0{,}3 & 0 \\ -120 & 96 & -128 & -120 & 96 \end{array} \right|$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$\vec{M}_C = [0{,}08\cdot(-120)\vec{j} + 0{,}3\cdot 96\,\vec{k}] - [0{,}3\cdot(-128)\vec{j} +$
$+ 0{,}08\cdot 96\,\vec{i}]$

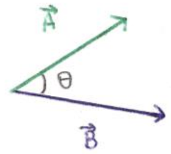
$\vec{M}_C = -9{,}6\vec{j} + 28{,}8\vec{k} + 38{,}4\vec{j} - 7{,}68\vec{i}$

$\vec{M}_C = -7{,}68\vec{i} + 28{,}8\vec{j} + 28{,}8\vec{k}$

$\therefore \boxed{\vec{M}_C = -(7{,}68\,N.m)\vec{i} + (28{,}8\,N.m)\vec{j} + (28{,}8\,N.m)\vec{k}}$

6. Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ é definido como:



$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A\cdot B\cdot \cos\theta}$

• Propriedades:

* Comutativa = $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
* Multiplicação por escalar = $a(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (a\vec{A})\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot(a\vec{B})$
* Distributiva = $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\vec{D})$

Produto Escalar em termos das Componentes Retangulares

O produto escalar de dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ pode ser expresso em componentes retangulares.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})\cdot(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

Da definição de produto escalar, temos:

$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \qquad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

Assim:

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y\cdot B_y + A_z\cdot B_z}$$

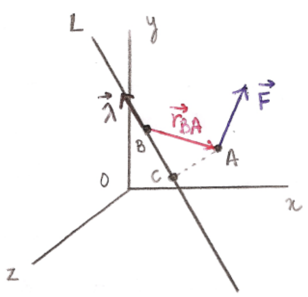
7. Produto Triplo Misto

O produto triplo misto entre três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, é expresso através do determinante.

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

8. Momento de uma Força em Relação a um Eixo

Em algumas situações precisamos determinar o momento em relação a um eixo específico.



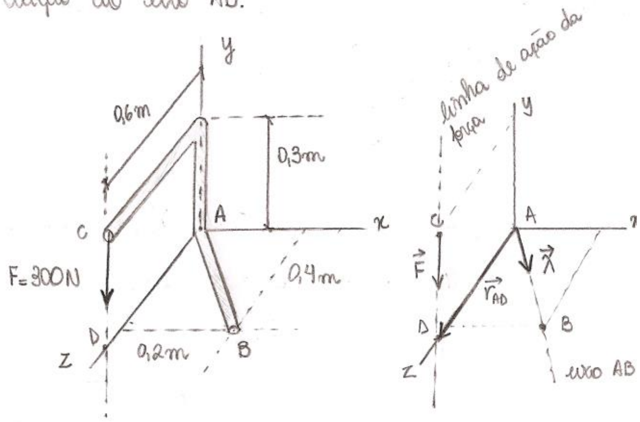
O momento da força $\vec{F}$ aplicada em A em relação ao eixo BL é dado por:

$$M_{BL} = \vec{\lambda}\cdot\vec{M}_B = \vec{\lambda}\cdot(\vec{r}_{BA}\times\vec{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

onde:

$$\vec{r}_{BA} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = \vec{r}_A - \vec{r}_B =$$
$$= (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}$$

Exemplo 2. Determine o momento $\vec{M}_{AB}$ produzido pela força $\vec{F}$, que tende a girar o tubo em relação ao eixo AB.



· Vetor unitário do eixo AB

$$\vec{r}_{AB} = \vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$
$$\vec{r}_{AB} = 0{,}2\vec{i} + 0{,}4\vec{k}$$
$$r_{AB} = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}4^2} = 0{,}4472$$

$$\lambda = \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = \boxed{0{,}4472\vec{i} + 0{,}8944\vec{k}}$$

· Vetor posição:

De acordo com o princípio da equivalência podemos utilizar qualquer vetor posição que tenha origem em algum ponto do eixo AB e fim na linha de ação da força (CD). Para facilitar vamos escolher o vetor $\vec{r}_{AD}$.

$$\vec{r}_{AD} = 0{,}6\vec{k}$$

• Momento em relação ao eixo AB.

$M_{AB} = \vec{\lambda} \cdot (\vec{r}_{AD} \times \vec{F}) =$

$$= \begin{array}{|ccc|cc|} 0{,}4472 & 0 & 0{,}8944 & 0{,}4472 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 0 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & + \; + & + \end{array}$$

$M_{AB} = -[(-300) \cdot 0{,}6 \; 0{,}4472] = 80{,}496$

$\boxed{M_{AB} = 80{,}50 \text{ N.m}}$

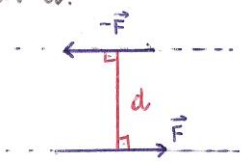
$\vec{M}_{AB} = \vec{\lambda} \cdot M_{AB} = (0{,}4472\vec{i} + 0{,}8944\vec{k}) \cdot 80{,}50$

$\vec{M}_{AB} = 36{,}0\vec{i} + 72{,}0\vec{j}$

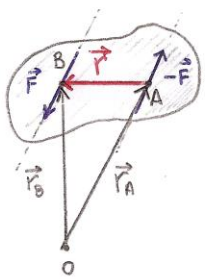
$\boxed{M_{AB} = (36{,}0 \text{ N.m})\vec{i} + (72{,}0 \text{ N.m})\vec{j}}$

9. Momento de um Binário

Um binário é definido como duas forças de igual intensidade, linhas de ação paralelas, separadas por uma distância perpendicular d.



O momento produzido por um binário é chamado, momento de um binário. Em notação vetorial o momento em relação a O é:



$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$

• Intensidade:

$\boxed{M = F \cdot d}$

onde:

d = é a distância perpendicular

• Direção e Sentido:

Regra da mão direita.

10. Binário Equivalente

Se dois binários produzem um momento com a mesma intensidade, direção e sentido, então esses dois binários são equivalentes.

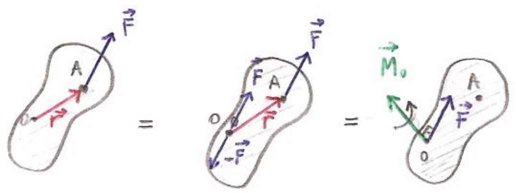
11. Momento de um Binário Resultante

Como os momentos de binário são vetores sua resultante pode ser determinada pela adição vetorial.

$\boxed{\vec{M}_R = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})}$

12. Simplificação de um Sistema Força-Binário

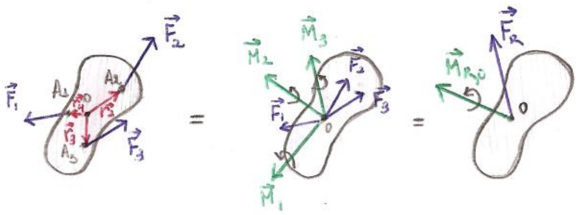
Podemos mover qualquer força $\vec{F}$ que atua sobre um corpo rígido para um ponto arbitrário O, desde que se adicione um binário cujo momento é igual ao momento de $\vec{F}$ em relação a O.



13. Simplificações de um Sistema Força-Binários

Qualquer* sistema de força, por mais complexo que seja, pode ser reduzido a um sistema força-binário equivalente atuando em O.

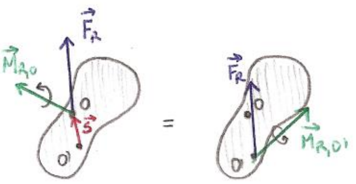
* concorrentes, coplanares e paralelas.



O sistema força-binário equivalente é definido pelas equações:

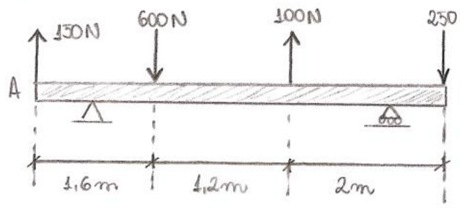
$$\boxed{\vec F_R = \Sigma \vec F} \quad ; \quad \boxed{\vec M_{R,O} = \Sigma \vec M = \Sigma(\vec r \times \vec F)}$$

Uma vez que um sistema de forças tenha sido reduzido a uma força e um binário no ponto O, pode ser facilmente reduzido em uma força e um binário em outro ponto O'



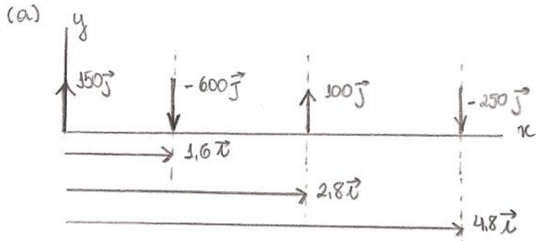
$$\boxed{\vec M_{R,O'} = \vec M_O + (\vec s \times \vec F_R)}$$

<u>Exemplo 3</u>. Uma viga de 4,80m está sujeita as três forças mostradas na figura. Reduza o sistema de forças dado a (a) sistema força-binário equivalente em A, (b) um sistema força-binário equivalente em B, (c) a uma força única ou resultante.



* desconsiderando as reações de apoio.

(a)



• Força-binário em A:

$\vec F_R = \Sigma \vec F = 150\vec j - 600\vec j + 100\vec j - 250\vec j = -600\vec j$

$\boxed{\vec F_R = -(600N)\vec j}$

$\vec M_A = \Sigma(\vec r \times \vec F)$

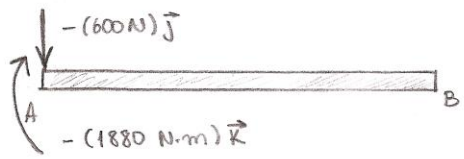
$\vec M_A = [(1,6\vec i) \times (-600\vec j)] + [(2,8\vec i) \times (100\vec j)] +$
$+ [(4,8\vec i) \times (-250\vec j)]$

$\vec M_A = -960\vec k + 280\vec k - 1200\vec k$

$\vec M_A = -1880\vec k$

$\vec M_A = -(1880 \text{ N.m})\vec k$

$\boxed{\vec F_R = 600\text{ N } (\downarrow)}$ e $\boxed{\vec M_A = 1880 \text{ N.m } (\circlearrowright)}$



(b) • Força-binário em B

A força resultante permanecerá unalterada

$\vec M_B = \vec M_A + (\vec r_{BA} \times \vec F_R)$

onde $\vec r_{BA} = \vec{BA} = -4,8\vec i$

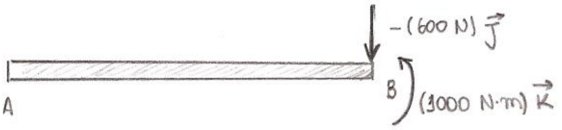
$\vec M_B = -1880\vec k + [(-4,8\vec i) \times (-600\vec j)]$ $= \vec k$

$\vec M_B = -1880\vec k + 2880\vec k$

$\vec M_B = 1000\vec k$

$\vec M_B = (1000 \text{ N.m})\vec k$

$\boxed{\vec F_R = 600\text{ N } (\downarrow)}$ e $\boxed{\vec M_B = 1000 \text{ N.m} (\circlearrowleft)}$



(c) • Força resultante

$$\vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{M}_A$$

onde : $\vec{r} = r_x \vec{i}$

$$(r_x \vec{i}) \times (-600\vec{j}) = -1880\vec{k}$$

$$-600\, r_x \vec{k} = -1880\vec{k}$$

$$r_x = \frac{1880}{600}$$

$$\boxed{r_x = 3,13\ m}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o momento em relação a origem O da força $\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ que atua em um ponto A. Suponha que o vetor posição A seja $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

- Cálculo do momento:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{matrix}\Bigg|$$

$$= -9\vec{\imath} + 16\vec{\jmath} - 10\vec{k} + 6\vec{\jmath} - 20\vec{\imath} + 12\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{M}_0 = -11\vec{\imath} + 22\vec{\jmath} + 22\vec{k}} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

2. Dados os vetores $\boldsymbol{P} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{Q} = Q_x\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$. Determine o valor de Q_x para qual o valor do produto escalar entre os dois vetores é igual a 1.

- Produto escalar entre os vetores $\vec{P}$ e $\vec{Q}$:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = 1$$

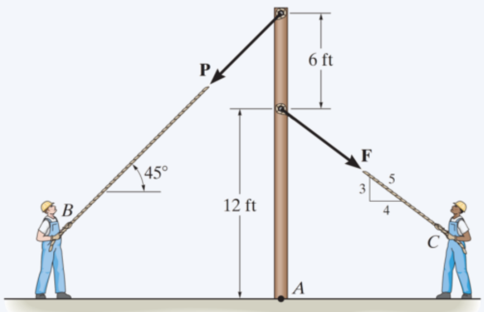
$$(3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}) \cdot (Q_x\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}) = 1$$

$$3Q_x + (-1)5 + 2(-3) = 1$$

$$3Q_x - 11 = 1$$

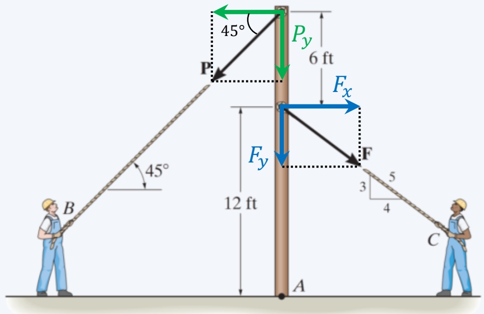
$$\boldsymbol{Q_x = 4} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

3. Dois homens exercem forças de $F = 80\ lb$ e $P = 50\ lb$ sobre as cordas. Determine o momento de cada força em relação a A. Em que sentido o poste girará, horário ou anti-horário?



- Decompondo as forças:

P_x



Apenas as componentes P_x e F_x produzem momento em relação a A.

- Momento da força P em relação a A:

$$(M_A)_B = P_x \cdot (6 + 12)$$

$$= P \cdot \cos(45°) \cdot 18 = 50 \cdot \cos(45°) \cdot 18$$

$$\boldsymbol{(M_A)_B = 6{,}36\ lb \cdot ft}\ (\circlearrowleft) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Momento da força F em relação a A:

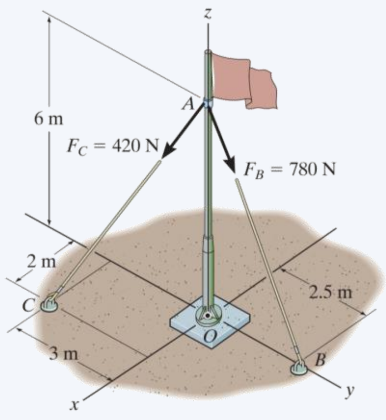
$$(M_A)_C = F_x \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 12$$

$$= 80 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) \cdot 12$$

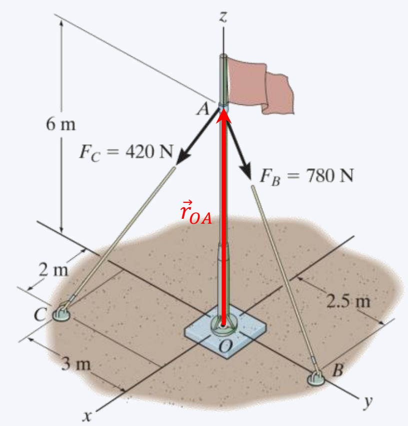
$$\boldsymbol{(M_A)_C = 768\ lb \cdot ft}\ (\circlearrowright) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

Como $\boldsymbol{(M_A)_B} < \boldsymbol{(M_A)_C}$ o poste girará no sentido horário.

4. Determine o momento produzido pela força Fc sobre o ponto O. Expresse os resultados em coordenadas cartesianas.



- DCL:



- Coordenada dos pontos:

$A(0{,}0{,}0)$

$B(0{,}0{,}6)$

$C(0; 2{,}5; 0)$

$D(2; -3; 0)$

- Vetor posição ($\vec{r}$):

$$\vec{r}_{AC} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}$$

$$\vec{r}_{OA} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

- Módulo do vetor posição (r):

$$r_{AC} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7{,}00\ m$$

Não será necessário determinar o módulo do vetor $\vec{r}_{OA}$.

- Vetor unitário ($\vec{\lambda}$):

$$\vec{\lambda}_{AC} = \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 6\vec{k}}{7{,}00}$$

$$= 0{,}286\vec{\imath} - 0{,}428\vec{\jmath} - 0{,}857\vec{k}$$

Não será necessário determinar o vetor $\vec{\lambda}_{OA}$.

- Vetor Força ($\vec{F}_C$):

$$\vec{F}_C = F_C \cdot \vec{\lambda}_{AC}$$

$$= (0{,}286 \cdot F_C)\vec{\imath} + (-0{,}428 \cdot F_C)\vec{\jmath} + (-0{,}857 \cdot F_C)\vec{k}$$

$$= (0{,}286 \cdot 420)\vec{\imath} + (-0{,}428 \cdot 420)\vec{\jmath} + (-0{,}857 \cdot 420)\vec{k}$$

$$= (120{,}12)\vec{\imath} + (-179{,}76)\vec{\jmath} + (-359{,}94)\vec{k}$$

$$= 120{,}12\vec{\imath} - 179{,}76\vec{\jmath} - 359{,}94\vec{k}$$

- Cálculo do Momento ($\vec{M}_O$):

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

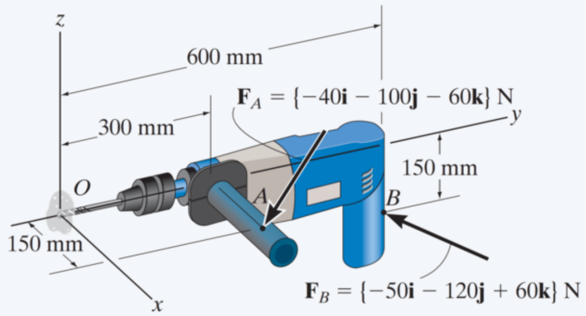
$$= \left| \begin{array}{ccc|cc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} & \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 120{,}12 & -179{,}76 & -359{,}94 & 120{,}12 & -179{,}76 \end{array} \right|$$

- - - + + +

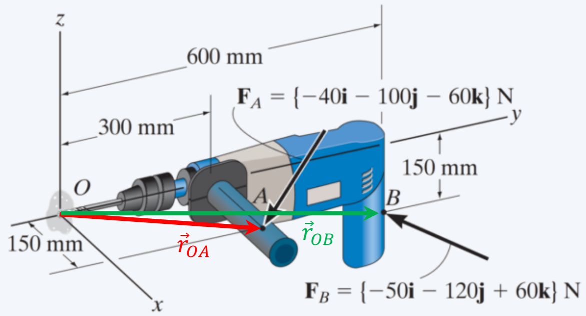
$$= 720{,}72\vec{\jmath} + 1078{,}56\vec{\imath}$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\mathbf{0}} = (\mathbf{1{,}078}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{0{,}721}\vec{\boldsymbol{\jmath}})\boldsymbol{kNm} \quad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

5. Determine o momento produzido pelas forças F_A e F_B sobre o ponto O localizado na broca da furadeira. Expresse os resultados em coordenadas cartesianas.



- DCL:



- Coordenada dos pontos:

$O(0{,}0{,}0)$

$A(0{,}15; 0{,}3; 0{,}03)\ em\ metros$

$B(0; 0{,}6; -0{,}15)$

- Vetor posição ($\vec{r}$):

$$\vec{r}_{OA} = (0{,}15 - 0)\vec{\imath} + (0{,}3 - 0)\vec{\jmath} + (0 - 0)\vec{k}$$
$$= 0{,}15\vec{\imath} + 0{,}3\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$
$$\vec{r}_{OB} = (0 - 0)\vec{\imath} + (0{,}6 - 0)\vec{\jmath} + (-0{,}15 - 0)\vec{k}$$
$$= 0\vec{\imath} + 0{,}6\vec{\jmath} - 0{,}15\vec{k}$$

- Cálculo do Momento ($\vec{M}_{O,A}$):

$$\vec{M}_{0,A} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}_A = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} & \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0 & 0{,}15 & 0{,}3 \\ -40 & -100 & -60 & -40 & -100 \end{array}\right|$$

$$= -18{,}00\vec{\imath} + 9{,}00\vec{\jmath} - 3{,}00\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{M}_{0,A} = (-18{,}00\vec{\imath} + 9{,}00\vec{\jmath} - 3{,}00\vec{k})Nm} \quad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Cálculo do Momento ($\vec{M}_{O,B}$):

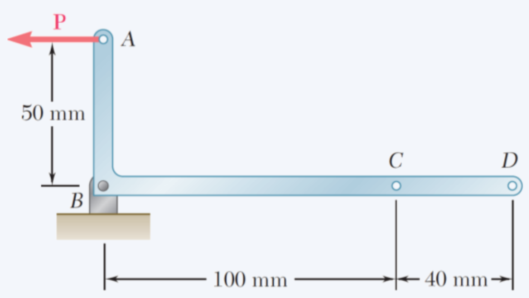
$$\vec{M}_{0,B} = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} & \vec{\imath} & \vec{\jmath} \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}15 & 0 & 0{,}6 \\ -50 & -120 & -60 & -50 & -120 \end{array}\right|$$

$$= 18{,}00\vec{\imath} + 7{,}50\vec{\jmath} + 30{,}0\vec{k}$$

$$\boldsymbol{\vec{M}_{0,B} = (18{,}00\vec{\imath} + 7{,}50\vec{\jmath} + 30{,}0\vec{k})Nm} \quad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

6. Uma força $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{50\ N}$ atua sobre uma alavanca em ângulo como mostrado na Figura. Substitua $\boldsymbol{P}$ por *(a)* um sistema força-binário equivalente em $\boldsymbol{B}$



(a)

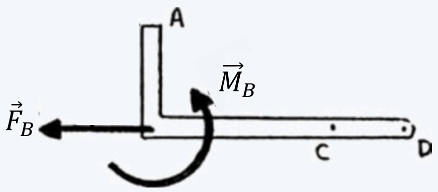
- Força Equivalente em B ($\vec{F}_B$):

$$\vec{F}_B = -P\vec{\imath} = -50{,}0\vec{\imath}$$

- Momento Equivalente em B ($\vec{M}_B$):

$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BA} \times \vec{P}$$
$$= (0{,}05\vec{\jmath}) \times (-50{,}0\vec{\imath})$$
$$= 2{,}50$$

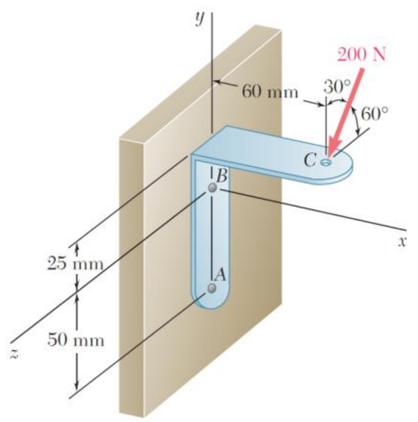
$$\boldsymbol{\vec{M}_B = (2{,}50\ \vec{k})\ Nm} \quad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$



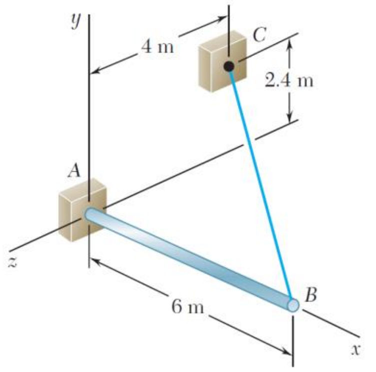
PROBLEMAS

1. Determine o momento em relação à origem $\boldsymbol{O}$, da força $\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$, que atua em um ponto A. Suponha que o vetor posição$\boldsymbol{A}$ seja: *(a)* $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$;*(b)* $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 2{,}5\boldsymbol{j} - 1{,}5\boldsymbol{k}$;*(c)* $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$.

2. Uma força de $200\ N$ é aplicada em um suporte $\boldsymbol{ABC}$ como mostrado na Figura. Determine o momento da força sobre$\boldsymbol{A}$.



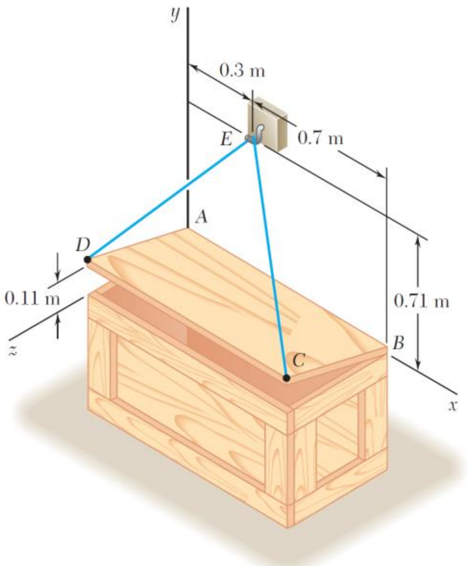
3. Uma barra de $6m$, tem uma ponta fixada em $\boldsymbol{A}$. Um cabo de aço é esticado da ponta livre $\boldsymbol{B}$ da barra ao ponto $\boldsymbol{C}$ localizado na parede vertical. Se a tensão no cabo é $2{,}5\ kN$, determine o momento que a força exerce sobre $\boldsymbol{A}$, através do cabo$\boldsymbol{B}$.



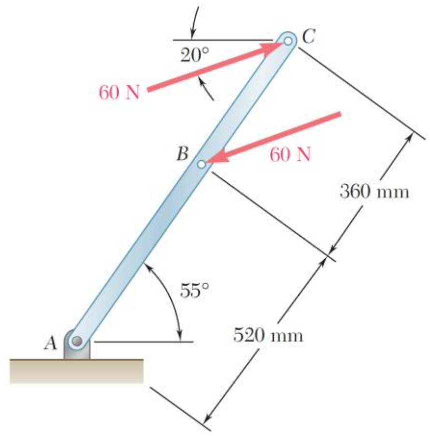
4. Dados os vetores $\boldsymbol{P} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{Q} = 4\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} - \boldsymbol{3k}$ e $\boldsymbol{S} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, calcule os produtos escalares $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{S}$.

5. Dados os vetores $\boldsymbol{P} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{Q} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_x}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, determine o valor de $\boldsymbol{S_x}$ para qual os três vetores são coplanares.

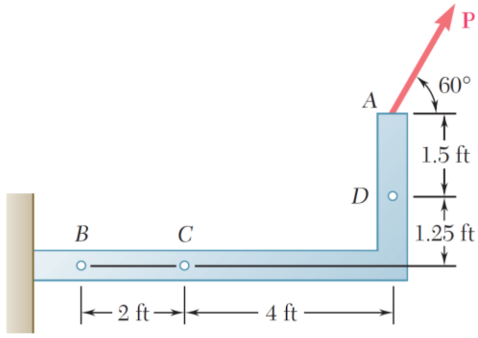
6. A tampa $\boldsymbol{ABCD}$ de uma caixa de armazenagem, de $0{,}61\ m\ \times 1{,}0\ m$, é articulada ao longo do lado $\boldsymbol{AB}$e mantida aberta com uma corda $\boldsymbol{DEC}$, lançada sem atrito a um gancho em$\boldsymbol{E}$. Sabe-se que a tração na corda é $66\ N$, determine o momento em relação a cada um dos eixos de coordenadas da força exercida pela corda em $\boldsymbol{D}$.



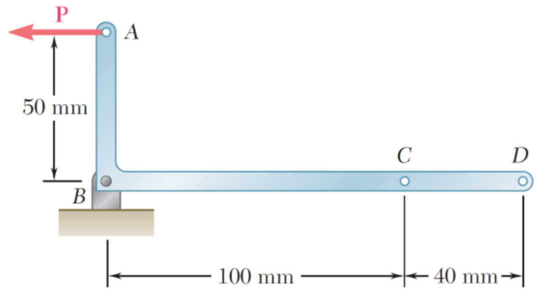
7. Duas forças paralelas de $\boldsymbol{60\ N}$ são aplicadas a uma alavanca como mostrado na Figura. Determine o momento do binário formado pelas duas forças:*(a)* resolvendo para cada componente horizontal e vertical e adicionado os momentos dos binários resultantes; *(b)* usando a distância perpendicular entre as duas forças;*(c)* somando o momento de duas forças em relação ao ponto $\boldsymbol{A}$.



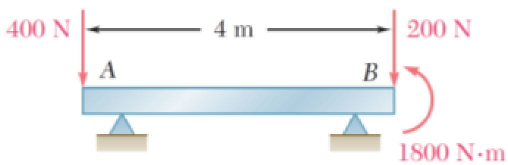
8. Uma força $\boldsymbol{P}$ de $160\ lb$é aplicada no ponto$A$de um elemento estrutural. Substitua $\boldsymbol{P}$ por *(a)* um sistema força-binário equivalente em $\boldsymbol{C}$, *(b)*um sistema equivalente que consista em uma força vertical em $\boldsymbol{B}$ e uma segunda força em $\boldsymbol{D}$.



9.Uma força $\boldsymbol{P}$ de $80\ N$atua sobre uma alavanca com o ângulo mostrado na Figura. *(a)* Substitua $\boldsymbol{P}$ por um sistema força-binário equivalente $\boldsymbol{B}$;*(b)*encontre as duas forças verticais em $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ que seja equivalente ao binário encontrado na parte *(a)*.

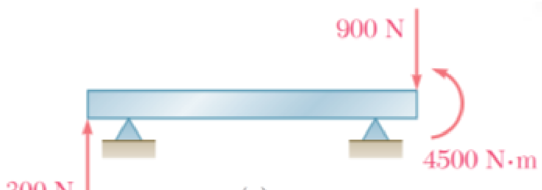


10. Uma viga de $4m$ de comprimento, está sujeita a uma variedade de cargas, substitua cada carga por um sistema força-binário equivalente na extremidade $\boldsymbol{A}$ da viga.



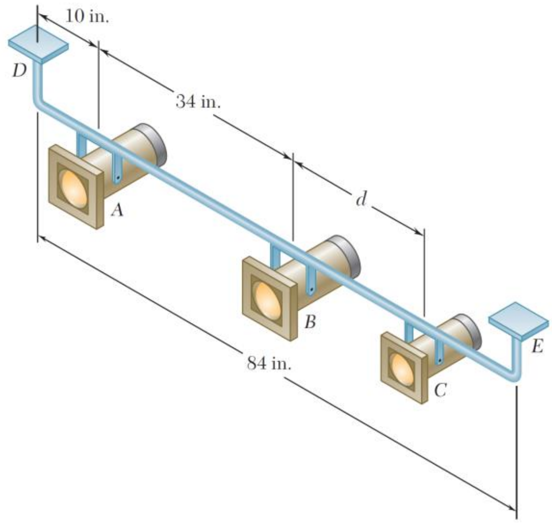
(a)

(b)

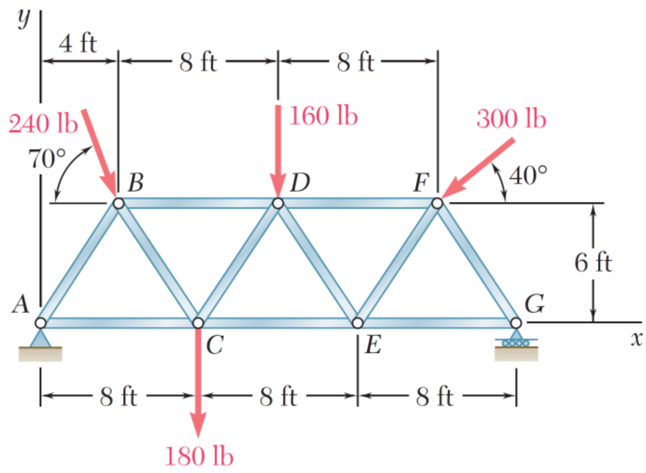


(c)

11. Três refletores de palco são montados em um tubo, como mostra a Figura. As luzes em $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, que pesam 4,1 lb cada uma, enquanto outra em $\boldsymbol{C}$ pesa 3,5 lb. *(a)* Se $\boldsymbol{d} = 25\ in$, determine a distância do ponto $\boldsymbol{D}$ até a linha de ação da resultante dos pesos dos três refletores; *(b)* Determine o valor de $\boldsymbol{d}$ de modo que a resultante dos pesos passe pelo ponto médio do tubo.



12. Uma treliça sustenta a carga mostrada na Figura. Determine a força equivalente que atua sobre a treliça e o ponto de interseção da sua linha de ação com uma linha, que passa pelos pontos $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{G}$.



RESPOSTAS

1. $(a)\boldsymbol{M}_o = -11\boldsymbol{i} + 22\boldsymbol{j} + 22\boldsymbol{k}$;
   $(b)\ \boldsymbol{M}_o = 0$;
   $(c)\boldsymbol{M}_o = -45\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$.
2. $\boldsymbol{M}_A = (7{,}50\ N \cdot m)\ \boldsymbol{i} - (6{,}00\ N \cdot m)\ \boldsymbol{j} - (10{,}39\ N \cdot m)\ \boldsymbol{k}$.
3. $\boldsymbol{M}_A = 7{,}89\ \boldsymbol{j} + 4{,}74\ \boldsymbol{k}$.
4. $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{Q} = 1$, $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{S} = -11$ e $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{S} = 10$.
5. $\boldsymbol{S}_x = 7$.
6. $\boldsymbol{M}_x = -28{,}4\ N \cdot m$, $\boldsymbol{M}_y = 13{,}20\ N \cdot m$ e $\boldsymbol{M}_z = -2{,}42\ N \cdot m$.
7. $(a)\boldsymbol{M} = 12{,}39\ N \cdot m$;
   $(b)\boldsymbol{M} = 12{,}39\ N \cdot m$;
   $(c)\boldsymbol{M} = 12{,}39\ N \cdot m$.
8. $(a)\boldsymbol{M}_C = 334\ lb \cdot ft\ (\circlearrowleft)$;
   $(b)\boldsymbol{P}_B = 20{,}0\ lb\ (\uparrow)$ e $P_D = 143{,}0\ lb\ (\measuredangle\ 56°)$.
9. $(a)\boldsymbol{M}_B = 4{,}00\ N \cdot m\ (\circlearrowleft)$;
   $(b)\boldsymbol{F}_C = 100{,}0\ N\ (\downarrow)$ e $\boldsymbol{F}_D = 100{,}0\ N\ (\uparrow)$.
10. $(a)\boldsymbol{R}_A = 600\ N\ (\downarrow)$ e $\boldsymbol{M}_A = 1000\ N \cdot m\ (\circlearrowleft)$;
    $(b)\boldsymbol{R}_A = 600\ N\ (\downarrow)$ e $\boldsymbol{M}_A = 900\ N \cdot m\ (\circlearrowright)$;
    $(c)\boldsymbol{R}_A = 600\ N\ (\downarrow)$ e $\boldsymbol{M}_A = 900\ N \cdot m\ (\circlearrowleft)$.
11. $(a)\boldsymbol{L} = 39{,}6\ in$;
    $(b)\boldsymbol{d} = 33{,}1\ in$.
12. $\boldsymbol{R} = 773\ lb\ (\measuredangle\ 79{,}0°)$; $\boldsymbol{d} = 9{,}54\ ft$.

Capítulo 3 - Equilíbrio de Corpos Rígidos

TEORIA (NOTAS DE AULA)

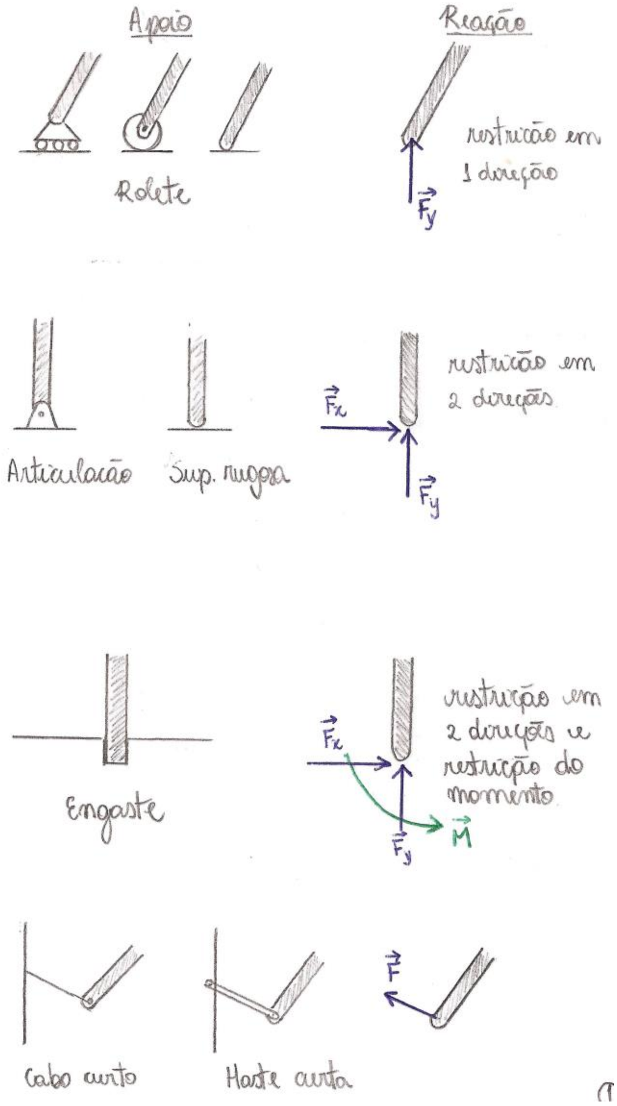
1. Introdução

Neste capítulo vamos estudar as condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido. Trataremos do equilíbrio de estruturas bidimensionais e tridimensionais.

2. Equilíbrio em Duas Dimensões

Reações de Apoio

Vamos avaliar os vários tipos de reações que ocorrem em apoios e pontos de contatos entre corpos sujeitos a sistemas de forças coplanares.



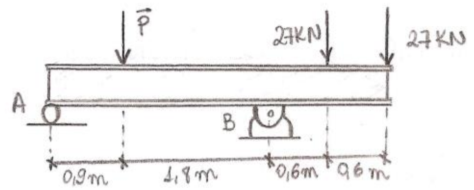
Equações de Equilíbrio

Considerando que a estrutura esteja no plano x e y, temos:

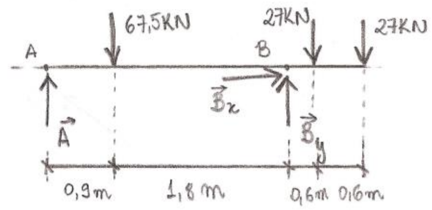
$\boxed{\sum F_x = 0}$, $\boxed{\sum F_y = 0}$ e $\boxed{\sum M_o = 0}$

As três equações acima podem ser resolvidas para no máximo 3 incógnitas.

Exemplo 1: Três cargas são aplicadas a uma viga tal como mostra a figura. A viga é sustentada por um rolete em A e por um pino em B. Desprezando o peso da viga, determine as reações em A e B quando P = 67,5 kN.



• Diagrama de corpo livre



• Eq. de equilíbrio

Força em x:

$\sum F_x = 0 \quad \xrightarrow{\oplus}$ (p/ direita)

$B_x = 0$

$\boxed{\vec{B}_x = 0}$

Momento em A:

$\Sigma M_A = 0 \quad \oplus\circlearrowleft$ (anti-horário)

$-67{,}5 \cdot 0{,}9 + B_y \cdot 2{,}7 - 27 \cdot 3{,}3 - 27 \cdot 3{,}9 = 0$

$-60{,}75 + 2{,}7 B_y - 89{,}1 - 105{,}3 = 0$

$2{,}7 B_y = 255{,}15$

$B_y = 94{,}5 \text{ kN}$

$\boxed{\vec{B}_y = 94{,}5 \text{ kN} \uparrow}$

Forças em y:

$\Sigma F_y = 0 \quad \oplus\uparrow$ (p/ cima)

$A - 67{,}5 + 94{,}5 - 27 - 27 = 0$

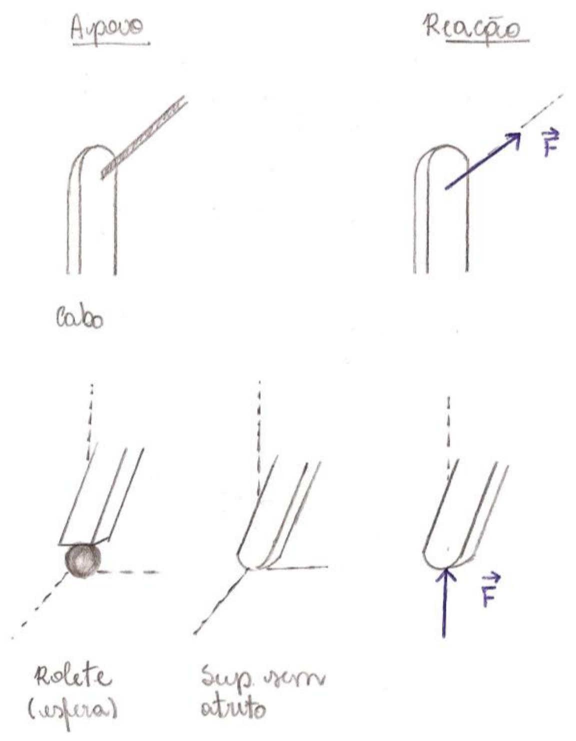
$A = 27 \text{ kN}$

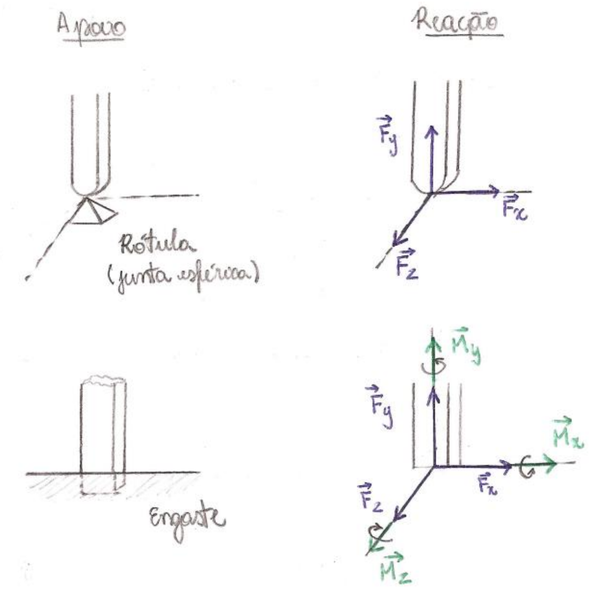
$\boxed{\vec{A} = 27 \text{ kN} \uparrow}$

---

3. Equilíbrio em Três Dimensões

Reações de Apoio





Equações de Equilíbrio

- Forma Vetorial

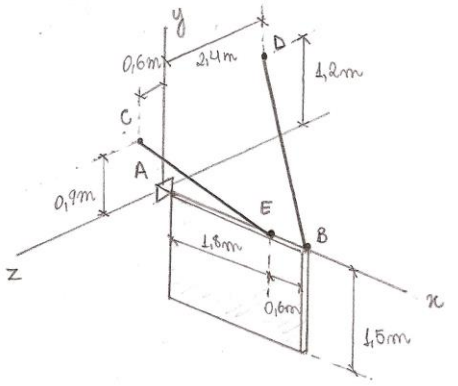
$\boxed{\Sigma \vec{F} = 0}$ e $\boxed{\Sigma \vec{M}_o = 0}$

- Forma Escalar

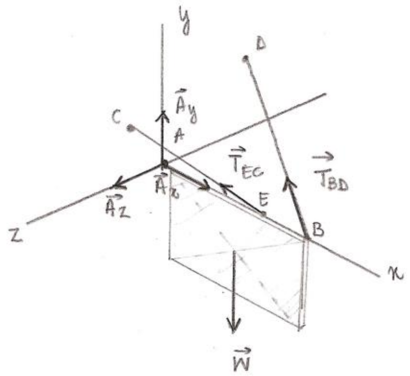
$$\boxed{\begin{array}{lll} \Sigma F_x = 0, & \Sigma F_y = 0 & \text{e} \quad \Sigma F_z = 0 \\ \Sigma M_x = 0, & \Sigma M_y = 0 & \text{e} \quad \Sigma M_z = 0 \end{array}}$$

* As seis eq. de equilíbrio escalares podem ser usadas para resolver no máximo seis incógnitas mostradas no diagrama de corpo livre.

Exemplo 2: Uma placa 1,5 x 2,4 m de massa específica uniforme pesa 1250 N e é sustentada por uma rótula em A e por dois cabos. Determine a tração em cada cabo e a reação em A.



• Diagrama de corpo livre



A(0,0,0)

B(2,4, 0, 0)

C(0, 0,9, 0,6)

D(0, 1,2, -2,4)

E(1,8, 0,0)

• $\vec{T}_{BD}$:

$$\vec{r}_{BD} = \vec{BD} = (x_D - x_B)\vec{i} + (y_D - y_B)\vec{j} + (z_D - z_B)\vec{k}$$

$$= (0-2,4)\vec{i} + (1,2-0)\vec{j} + (-2,4-0)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{BD} = -2,4\vec{i} + 1,2\vec{j} - 2,4\vec{k}$$

$$r_{BD} = \sqrt{(2,4)^2 + (1,2)^2 + (-2,4)^2} = 3,6\ m$$

$$\lambda_{BD} = \frac{\vec{r}_{BD}}{r_{BD}} = -0,667\vec{i} + 0,333\vec{j} - 0,667\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\vec{\lambda}_{BD} = \boxed{T_{BD}\,(-0,667\vec{i} + 0,333\vec{j} - 0,667\vec{k})}$$

• $\vec{T}_{EC}$:

$$\vec{r}_{EC} = \vec{EC} = (0-1,8)\vec{i} + (0,9-0)\vec{j} + (0,6-0)\vec{k}$$

$$\vec{r}_{EC} = -1,8\vec{i} + 0,9\vec{j} + 0,6\vec{k}$$

$$r_{EC} = \sqrt{(-1,8)^2 + (0,9)^2 + (0,6)} = 2,1\ m$$

$$\vec{\lambda}_{EC} = \frac{\vec{r}_{EC}}{r_{EC}} = -0,857\vec{i} + 0,428\vec{j} + 0,286\vec{k}$$

$$\vec{T}_{EC} = T_{EC}\vec{\lambda}_{EC} = \boxed{T_{EC}\,(-0,857\vec{i} + 0,428\vec{j} + 0,286\vec{k})}$$

(1)

• Eq. de equilíbrio

$$\Sigma\vec{F} = 0$$

$$(A_x - 0,667T_{BD} - 0,857T_{EC})\vec{i} +$$

$$(A_y + 0,333T_{BD} + 0,428T_{EC} - 1215)\vec{j} +$$

$$(A_z - 0,667T_{BD} + 0,286T_{EC})\vec{k} = 0$$

$$\Sigma\vec{M}_A = 0$$

$$[(2,4\vec{i}) \times T_{BD}(-0,667\vec{i} + 0,333\vec{j} - 0,667\vec{k})] +$$

$$[(1,8\vec{i}) \times T_{EC}(-0,857\vec{i} + 0,428\vec{j} + 0,286\vec{k}) +$$

$$(1,2\vec{i}) \times (-1215\vec{j}) = 0$$

$$T_{BD}\,0,7992\vec{k} - T_{BD}\,1,6008(-\vec{j}) + T_{EC}\,0,7704\vec{k} +$$

$$+ T_{EC}\,0,5148(-\vec{j}) - 1458\vec{k} = 0$$

$$0,7992T_{BD}\vec{k} + 1,6008T_{BD}\vec{j} + 0,7704T_{EC}\vec{k} +$$

$$+ 0,5148T_{EC}\vec{j} - 1458\vec{k} = 0$$

$$\boxed{(1,6008T_{BD} + 0,5148T_{EC})\vec{j} + (0,7992T_{BD} + 0,7704T_{EC} - 1458)\vec{k} = 0}$$

(2)

• Tornando os termos da (2) iguais:

$$\begin{cases} 1,6008T_{BD} - 0,5148T_{EC} = 0 \rightarrow T_{BD} = 0,3216T_{EC} \\ 0,7992T_{BD} + 0,7704T_{EC} - 1458 = 0 \leftarrow \end{cases}$$

$0{,}7992\,T_{BD} + 0{,}7704\,T_{EC} - 1458 = 0$

$0{,}7992\,(0{,}3216\,T_{EC}) + 0{,}7704\,T_{EC} - 1458 = 0$

$T_{EC} = \frac{1458}{1{,}0274}$

$\boxed{T_{EC} = 1419\ N}$

$\therefore\ T_{BD} = 0{,}3216 \cdot 1419$

$\boxed{T_{BD} = 456{,}3\ N}$

• Componentes de $\vec{A}$:

$A_x - 0{,}667\,T_{BD} - 0{,}857\,T_{EC} = 0$

$A_x = (0{,}667 \cdot 456{,}3) + (0{,}857 \cdot 1419)$

$\boxed{A_x = 1520\ N}$

$A_y + 0{,}333\,T_{BD} + 0{,}428\,T_{EC} - 1215 = 0$

$A_y = -(0{,}333 \cdot 456{,}3) - (0{,}428 \cdot 1419) + 1215$

$\boxed{A_y = 455{,}7\ N}$

$A_z - 0{,}667\,T_{BD} + 0{,}286\,T_{EC} = 0$

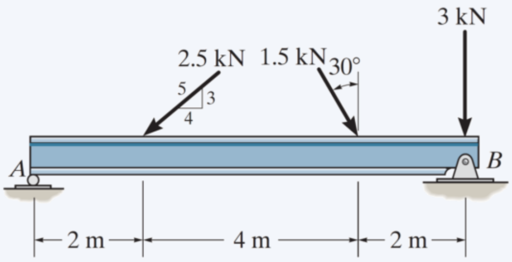
$A_z = (0{,}667 \cdot 456{,}3) - (0{,}286 \cdot 1419)$

$\boxed{A_z = -101{,}48\ N}$

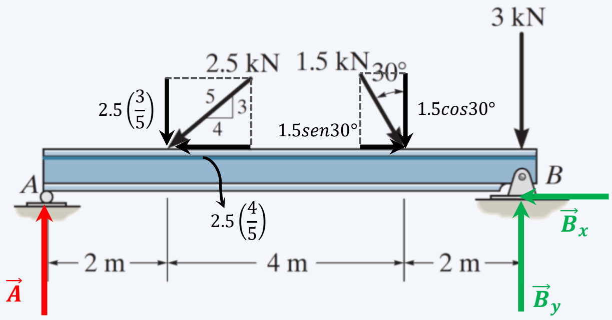
$\boxed{\vec{A} = (1520\ N)\,\vec{i} + (455{,}7\ N)\,\vec{j} - (101{,}48)\,\vec{k}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine as reações no apoio do tipo rolete em $\boldsymbol{A}$ e no suporte articulado em $\boldsymbol{B}$ para a estrutura representada na Figura abaixo.



- DCL:



- Cálculo da reação $\vec{A}$:

$$\sum M_B = 0\ (\circlearrowleft)$$

$$-A \cdot 8 + 2{,}5\left(\frac{3}{5}\right) \cdot 6 + 1{,}5cos30° \cdot 2 = 0$$

$$A \cdot 8 = 11{,}598$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \mathbf{1{,}450}\ \boldsymbol{kN}\ (\uparrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Cálculo de B_y e B_x:

$$\sum F_y = 0\ (\uparrow)$$

$$A - 2{,}5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 1{,}5cos30° - 3 + B_y = 0$$

$$1{,}450 - 1{,}5 - 1{,}299 - 3 + B_y = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{y}} = \mathbf{4{,}35}\ \boldsymbol{kN}\ (\uparrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\sum F_x = 0\ (\rightarrow)$$

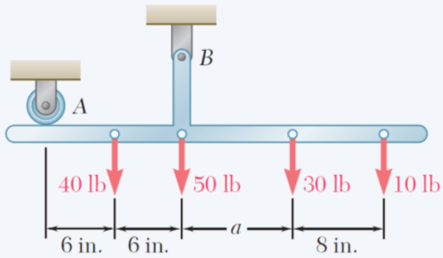
$$-2{,}5\left(\frac{4}{5}\right) + 1{,}5sen30° - B_x = 0$$

$$-2{,}5\left(\frac{4}{5}\right) + 1{,}5sen30° - B_x = 0$$

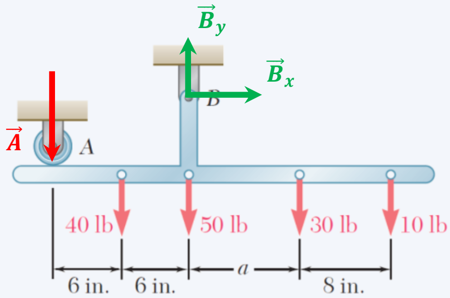
$$-1{,}25 - B_x = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{1{,}25}\ \boldsymbol{kN}\ (\rightarrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

2. Um apoio em T sustenta quatro cargas mostradas na Figura. Determine as reações em $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ se $a = 5\ in.$



- DCL:



- Cálculo da reação $\vec{A}$:

$$\sum M_B = 0\ (\circlearrowleft)$$

$$A \cdot 12 + 40 \cdot 6 - 30 \cdot 5 - 10 \cdot 13 = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{A}} = \mathbf{3{,}33}\ \boldsymbol{lb}\ (\uparrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Cálculo de B_y e B_x:

$$\sum F_y = 0\ (\uparrow)$$

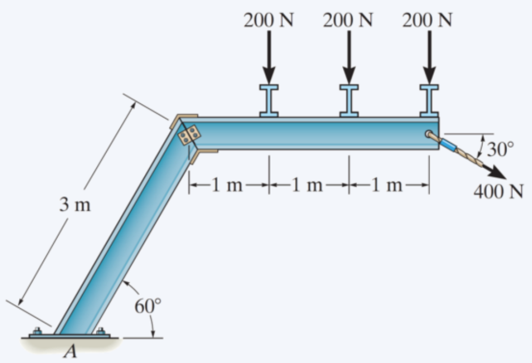
$$-3{,}33 - 40 - 50 + B_y - 30 - 10 = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{y}} = \mathbf{133{,}33}\ \boldsymbol{lb}\ (\uparrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

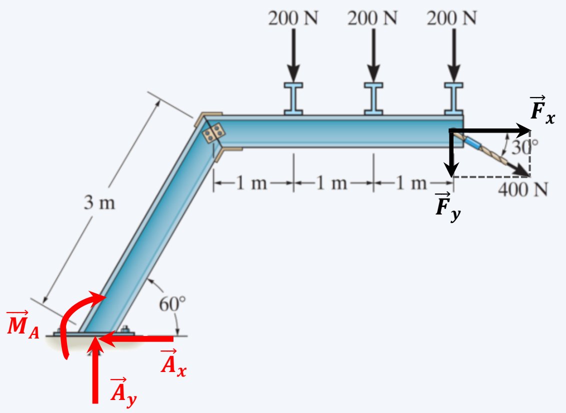
$$\sum F_x = 0\ (\rightarrow)$$

$$\vec{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

3. Determine as reações em $\boldsymbol{A}$ (apoio do tipo engaste), usado para sustentar esta estrutura de aço representada na Figura abaixo. Despreze a espessura da viga.



- DCL:



- Cálculo das reações em $\boldsymbol{A}$:

$$\sum F_y = 0\ (\uparrow)$$

$$A_y - 200 - 200 - 200 - 400 \cdot sen30° = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{A}}_y = \boldsymbol{800\ N}\ (\uparrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\sum F_x = 0\ (\rightarrow)$$

$$-A_x - F_x = 0 \ \rightarrow \ A_x = F_x = F \cdot cos30°$$

$$A_x = 400 \cdot cos30$$

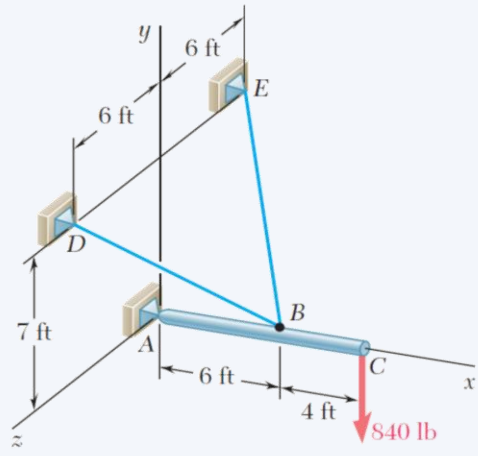
$$\vec{\boldsymbol{A}}_x = \boldsymbol{346\ N}\ (\leftarrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\sum M_A = 0\ (\circlearrowleft)$$

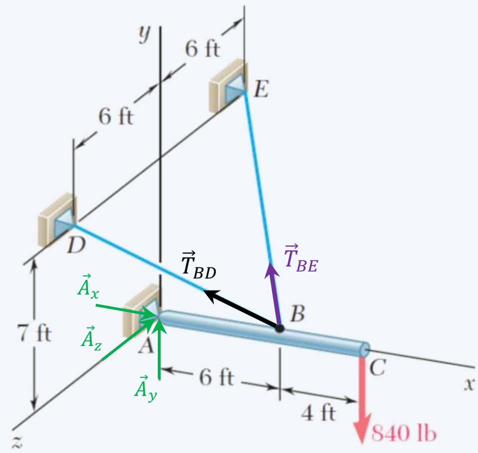
$$-M_A - 200 \cdot 2{,}5 - 200 \cdot 3{,}5 - 200 \cdot 4{,}5 - (400 \cdot cos30°) \cdot 2{,}6 - (400 \cdot sen30° = 0$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_A = \boldsymbol{390\ Nm}\ (\circlearrowleft) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

4. Sobre uma lança 10 ft atua uma força de 840 lb como mostrado na Figura. Determine a tração em cada cabo e a reação da rótula em A.



- DCL:



- Coordenada dos pontos:

$A(0{,}0{,}0)$

$B(6; 0; 0)$

$C(10; 0; 0)$

$D(0; 7; 6)$

$E(0; 7; -6)$

- Vetor posição ($\vec{r}$):

$$\vec{r}_{BD} = (0-6)\vec{\imath} + (7-0)\vec{\jmath} + (6-0)\vec{k} = -6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

$$\vec{r}_{BE} = (0-6)\vec{\imath} + (7-0)\vec{\jmath} + (-6-0)\vec{k} = -6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - 6\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = 6\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

$$\vec{r}_{AC} = 10\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} - 0\vec{k}$$

- Módulo do vetor posição (r):

$$r_{BD} = \sqrt{(-6)^2 + (7)^2 + (6)^2} = 11\ tf$$

$$r_{BE} = \sqrt{(-6)^2 + (7)^2 + (-6)^2} = 11\ tf$$

Obs.: Não será necessário determinar o módulo dos vetores $\vec{r}_{AB}$ e $\vec{r}_{AC}$.

- Vetor unitário ($\vec{\lambda}$):

$$\vec{\lambda}_{BD} = \frac{\vec{r}_{BD}}{r_{BD}} = \frac{-6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + 6\vec{k}}{11}$$

$$= -0{,}545\vec{\imath} + 0{,}636\vec{\jmath} + 0{,}545\vec{k}$$

$$\vec{\lambda}_{BE} = \frac{\vec{r}_{BE}}{r_{BE}} = \frac{-6\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} - 6\vec{k}}{11}$$

$$= -0{,}545\vec{\imath} + 0{,}636\vec{\jmath} - 0{,}545\vec{k}$$

Obs.: Não será necessário determinar os vetores $\vec{\lambda}_{AB}$ e $\vec{\lambda}_{AC}$.

- Vetor Força ($\vec{T}$):

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD} \cdot \vec{\lambda}_{BD}$$

$$= (-0{,}545 \cdot T_{BD})\vec{\imath} + (0{,}636 \cdot T_{BD})\vec{\jmath} + (0{,}545 \cdot T_{BD})\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE} \cdot \vec{\lambda}_{BE}$$

$$= (-0{,}545 \cdot T_{BE})\vec{\imath} + (0{,}636 \cdot T_{BE})\vec{\jmath} + (-0{,}545 \cdot T_{BE})\vec{k}$$

- Momento em relação $\boldsymbol{A}$:

$$\sum \vec{M}_A = 0$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{T}_{BD} + \vec{r}_{AB} \times \vec{T}_{BE} + \vec{r}_{AC} \times (-840)\vec{\jmath} = 0$$

$$= \left[6\vec{\imath} \times \left(-0{,}545 \cdot T_{BD}\vec{\imath} + 0{,}636 \cdot T_{BD}\vec{\jmath} + 0{,}545 \cdot T_{BD}\vec{k}\right)\right] +$$

$$+\left[6\vec{\imath} \times \left(-0{,}545 \cdot T_{BE}\vec{\imath} + 0{,}636 \cdot T_{BE}\vec{\jmath} - 0{,}545 \cdot T_{BE}\vec{k}\right)\right] +$$

$$+[10\vec{\imath} \times (-840)\vec{\jmath}] = 0$$

$direção\ \vec{\jmath}: -3{,}27T_{DB} + 3{,}27T_{BE} = 0 \rightarrow \boldsymbol{T_{DB} = T_{BE}}$

$direção\ \vec{k}: -3{,}18T_{DB} + 3{,}18T_{BE} - 840 = 0$

$$\boldsymbol{T_{DB} = 1101\ lb} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\boldsymbol{T_{BE} = 1101\ lb} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Equilíbrio de Forças:

$\sum F_x = 0 : A_x - 0{,}545T_{BD} - 0{,}545T_{BE} = 0$

$$A_x - 0{,}545 \cdot 1101 - 0{,}545 \cdot 1101 = 0$$

$$\boldsymbol{A_x = 1200\ lb} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$\sum F_y = 0 : A_y + 0{,}636T_{BD} + 0{,}636T_{BE} - 840 = 0$

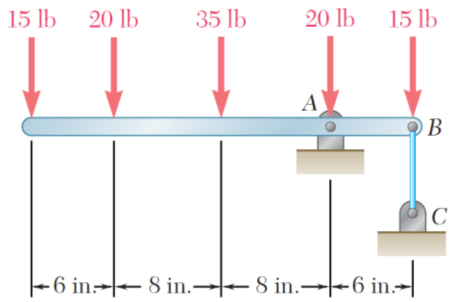
$$\boldsymbol{A_y = -560\ lb} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$\sum F_z = 0 : A_z + 0{,}545T_{BD} - 0{,}545T_{BE} = 0$

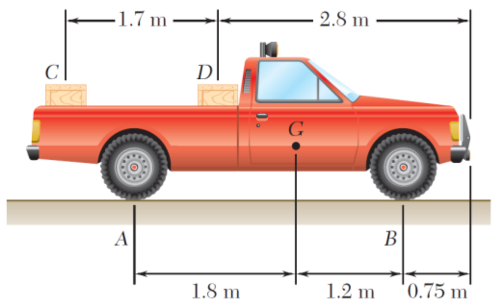
$$\boldsymbol{A_z = 0} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

PROBLEMAS

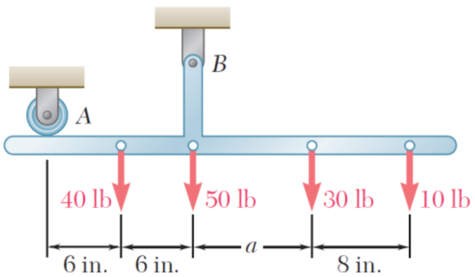
1. Para a viga e carregamento mostrados na Figura, determine *(a)* a reação em $\boldsymbol{A}$, *(b)*a tração no cabo$\boldsymbol{BC}$ pesam



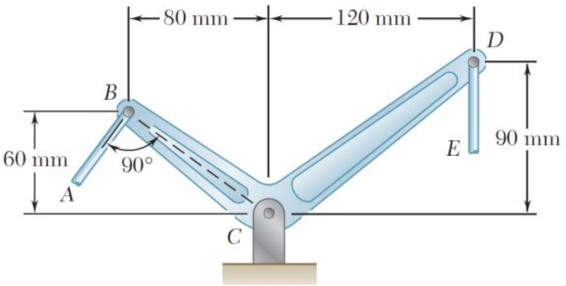
2. Dois caixotes, de massa 350 kg cada, são colocados na caçamba de uma caminhonete de 1400 kg. Determine as reações em cada uma das duas *(a)* rodas traseiras $\boldsymbol{A}$,*(b)* rodas dianteiras $\boldsymbol{B}$.



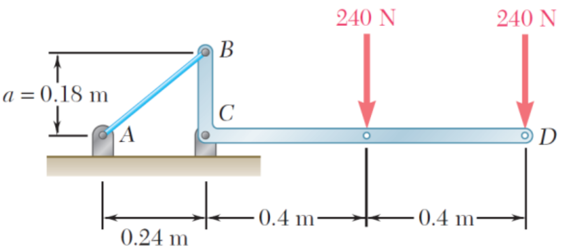
3. Um apoio em $\boldsymbol{T}$ sustenta quatro cargas mostradas na Figura. Determine as reações em $\boldsymbol{A}$ e$\boldsymbol{B}$ Dois *(a)* se $a = 10\ in$, *(b)* se $a = 7\ in$.



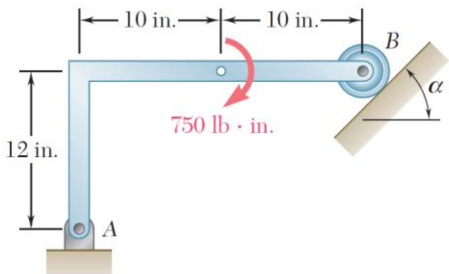
4. Duas hastes $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{DE}$ são conectadas por uma alavanca $\boldsymbol{BCD}$como foi mostrado na Figura. Sabendo que a tração na haste é $720\ N$, determine *(a)* a tração na haste $\boldsymbol{DE}$, *(b)* a reação em $\boldsymbol{C}$.



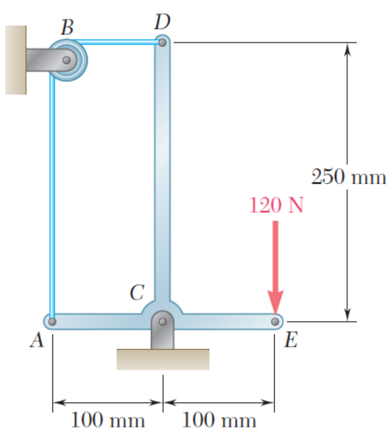
5. O suporte $\boldsymbol{BCD}$ é articulado em $\boldsymbol{C}$e preso, a um cabo de controle em$\boldsymbol{B}$. Para o carregamento mostrado na Figuram determine *(a)* a tração no cabo, *(b)* a reação em $\boldsymbol{C}$.



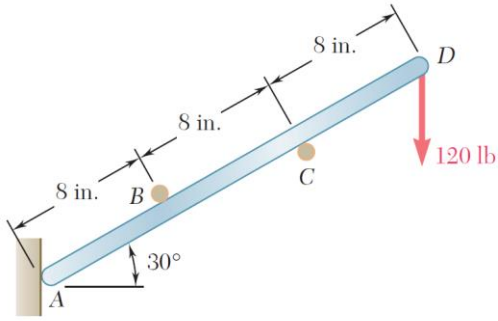
6. Determine as reações em$\boldsymbol{A}$ e em$\boldsymbol{B}$ quando *(a)*$\boldsymbol{\alpha} = 0°$, *(b)*$\alpha = 90°$.



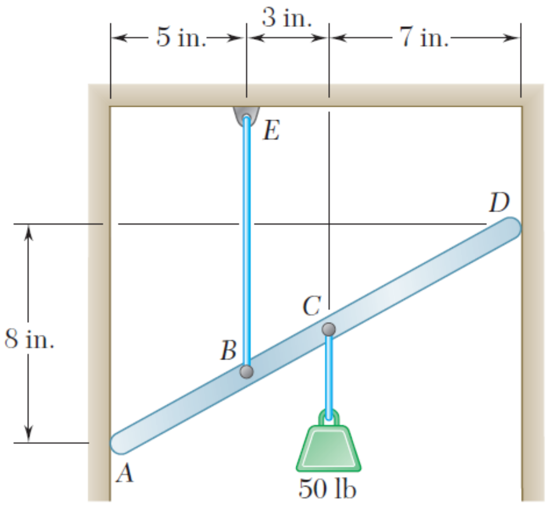
7. Desprezando o atrito, determine a tração no cabo $\boldsymbol{ABD}$ e a reação no suporte $\boldsymbol{C}$.



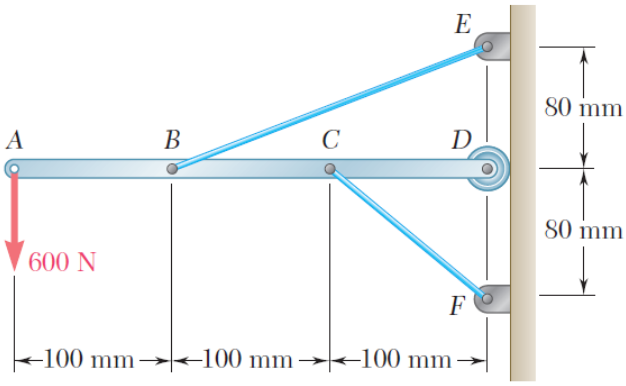
8. Uma haste leve é suportada sem atrito por cavilhas em$\boldsymbol{B}$e $\boldsymbol{C}$ e apoia sem atrito na parede em $\boldsymbol{A}$. A força vertical de $220\ lb$é aplicada em $\boldsymbol{D}$. Determine as reações em $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$.



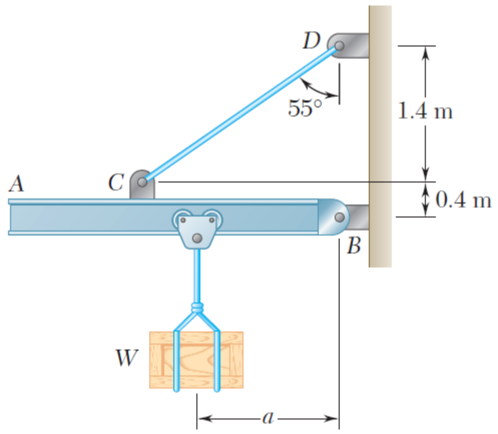
9. Uma barra leve $\boldsymbol{AB}$ é suspensa pelo cabo $\boldsymbol{BE}$ e suporta um bloco de $50\ lb$ em $\boldsymbol{C}$. As extremidades $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{D}$ da barra estão em contato, sem atrito, com as paredes. Determine a tração no cabo $\boldsymbol{BE}$ e as reações em $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{D}$.



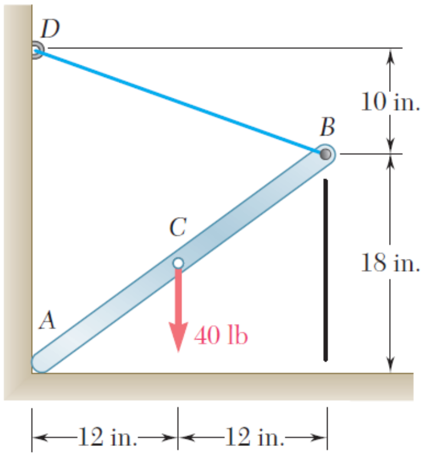
10. Determine a tração em cada cabo e a reação em $\boldsymbol{D}$.



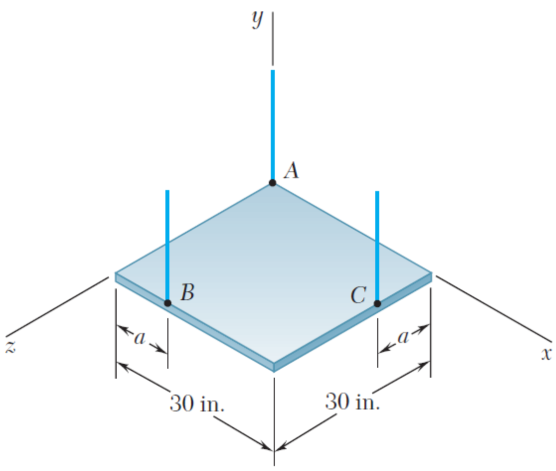
11. Um caixote de $50\ kg$ é preso a uma viga de rolamento como foi mostrado na Figura. Sabendo que $\boldsymbol{a} = 1{,}5\ m$, determine*(a)* a tração no cabo$\boldsymbol{CD}$, *(b)* a reação em $\boldsymbol{B}$.



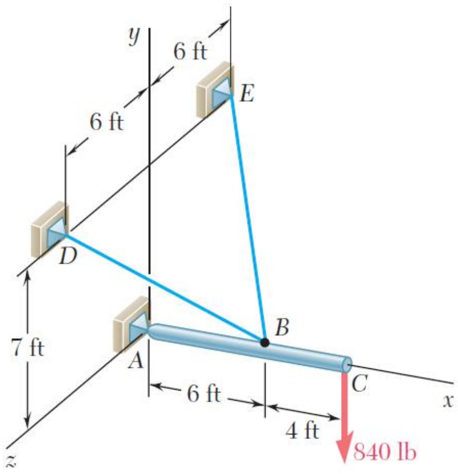
12. A extremidade de uma haste $\boldsymbol{AB}$ apoiada no canto $\boldsymbol{A}$ e a outra extremidade é presa a uma corda $\boldsymbol{BD}$. Se a haste suportar uma carga de$40\ lb$no ponto médio $\boldsymbol{C}$, encontre a reação em $\boldsymbol{A}$ e a tração na corda.



13. A placa quadrada de 24 lb mostrada na Figura é sustentada por três arames verticais. Determine *(a)* a tração em cada arame quando $a = 10\ in$, *(b)* o valor de a para qual as trações nos três arames sejam iguais.



14. Sobre uma lança $\boldsymbol{10\ ft}$ atua uma força de $\boldsymbol{840\ lb}$ como mostrado na Figura. Determine a tração em cada cabo e a reação da rótula em$\boldsymbol{A}$.



RESPOSTAS

1. $(a)\boldsymbol{A} = 245\ lb\ (\uparrow)$

$(b)\boldsymbol{F_{BC}} = 140{,}0\ lb$

2. $(a)\boldsymbol{A} = 6{,}07\ kN\ (\uparrow)$

$(b)\boldsymbol{B} = 4{,}23\ kN\ (\uparrow)$

3. $(a)\boldsymbol{A} = 20,0\ lb(\downarrow)$

$(b)\boldsymbol{B} = 4{,}23\ kN\ (\uparrow)$

4. $(a)\boldsymbol{F_{DE}} = 600\ N$

$(b)\boldsymbol{C} = 41253\ N\ (\measuredangle\ 69{,}8\ °)$

5. $(a)\boldsymbol{T} = 2{,}00\ kN$

$(b)\boldsymbol{C} = 2{,}32\ kN\ (\measuredangle\ 46{,}4\ °)$

6. $(a)\boldsymbol{A} = 37{,}5\ lb(\downarrow)$ e $\boldsymbol{B} = 37{,}5\ lb(\uparrow)$

$(b)\boldsymbol{A} = 62{,}5lb(\rightarrow)$ e $\boldsymbol{B} = 62{,}5lb(\leftarrow)$

7. $(a)\boldsymbol{T} = 80{,}0N$

$(b)\boldsymbol{C} = 89{,}4\ N\ (\measuredangle\ 26{,}6\ °)$

8. $\boldsymbol{A} = 69{,}3\ lb\ (\rightarrow), \boldsymbol{C} = 173{,}2\ lb\ (\measuredangle\ 60{,}0\ °)e\boldsymbol{B} = 34,6lb\ (\measuredangle\ 60{,}0°)$

9. $\boldsymbol{A} = 18{,}75\ lb\ (\rightarrow)$ e $\boldsymbol{D} = 18{,}75\ lb\ (\leftarrow)$

10. $\boldsymbol{D} = 3750\ N\ (\leftarrow)$

11. $\boldsymbol{B} = 457N\ (\measuredangle\ 26{,}6°), \boldsymbol{T_{CD}} = 499\ N$

12. $\boldsymbol{A} = 37{,}1\ lb\ (\measuredangle\ 62{,}4\ °)$ e $\boldsymbol{T} = 18{,}57\ lb$

13. $(a)\boldsymbol{A} = 6{,}00\ lb$ e$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = 9{,}00\ lb$

$(b)\boldsymbol{a} = 15{,}00\ in$

14. $\boldsymbol{T_{BD}} = 1100\ lb, \boldsymbol{T_{BE}} = 1100\ lb$e, $\boldsymbol{A} = (1200\ lb)\boldsymbol{i} - (560\ lb)\boldsymbol{j}$

Capítulo 4 - Forças Distribuídas: Centroides e Centro de Gravidade (Baricentro)

TEORIA (NOTAS DE AULA)

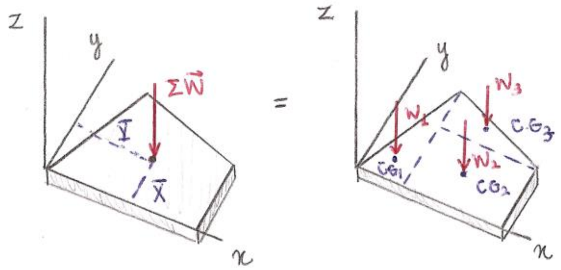
1. Introdução

Neste capítulo veremos como determinar o centro de gravidade, centroide e momento de primeira ordem para um corpo rígido.

2. Corpos Bidimensionais

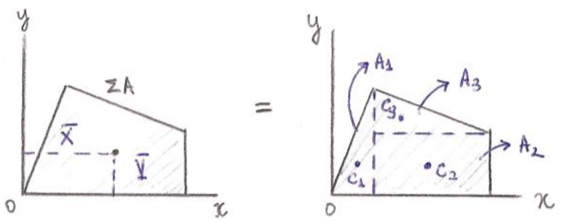
Centro de Gravidade (C.G)

Um corpo composto pode ser seccionado ou dividido em formas geométricas "mais simples", como: retângulos, triângulos e etc. Nesse caso, as coordenadas do $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ do C.G podem ser determinadas a partir das coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de cada peça que compõem o corpo.



$$\boxed{\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} W}{\Sigma W} \quad e \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} W}{\Sigma W}}$$

Centroide (C)



Para placa homogênea com espessura uniforme, o centro de gravidade C.G coincide com o centroide C da superfície. Assim:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} \cdot A}{\Sigma A} \quad e \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} \cdot A}{\Sigma A}}$$

3. Momentos de Primeira Ordem (Momento Estático)

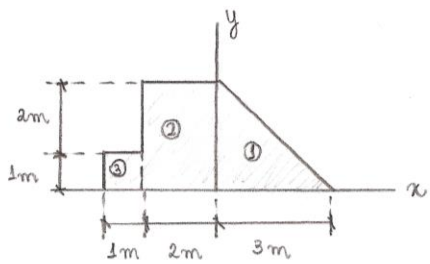
De modo análogo determinamos os momentos de primeira ordem.

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= \bar{X}\,\Sigma A = \Sigma \bar{x} \cdot A \\ Q_y &= \bar{Y}\,\Sigma A = \Sigma \bar{y} \cdot A \end{aligned}}$$

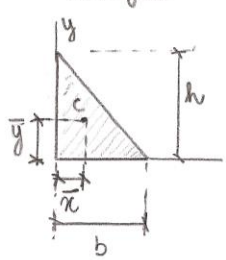
onde:

$\bar{X}$ e $\bar{Y} \rightarrow$ coordenada do centroide da superfície.

Exemplo 1: Para área mostrada na figura, determine (a) a localização do centroide, (b) os momentos de primeira ordem em relação aos eixo x e y.

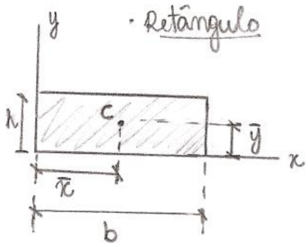


· Triângulo



$\bar{y} = \frac{h}{3}$ e $\bar{x} = \frac{b}{3}$

· Retângulo



$\bar{x} = \frac{b}{2}$

$\bar{y} = \frac{h}{2}$

· Cálculo do $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot A}{\sum A} = \frac{\bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 \cdot A_2 + \bar{x}_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{X} = \frac{\left(\frac{1}{3} b_1\right) \cdot \left(\frac{b_1 \cdot h_1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} b_2\right) \cdot \left(\frac{b_2 \cdot h_2}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} b_3 + 2\right) (b_3 h_3)}{\left(\frac{b_1 \cdot h_1}{2}\right) + (b_2 \cdot h_2) + (b_3 \cdot h_3)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)\left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot (-2)\right) \cdot (2 \cdot 3) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - 2\right)(1 \cdot 1)}{\left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 1)}$$

$$= \frac{4{,}5 - 6 - 2{,}5}{4{,}5 + 6 + 1} = \frac{-4}{11{,}5} = \boxed{-0{,}348}$$

· Cálculo do $\bar{Y}$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} \cdot A}{\sum A} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 \cdot A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{Y} = \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 3\right)\left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 3\right)(3 \cdot 2) + \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)(1 \cdot 1)}{\left(\frac{3 \cdot 3}{2}\right) \cdot (3 \cdot 2)(1 \cdot 1)}$$

$$\bar{Y} = \frac{4{,}5 + 9 + 0{,}5}{4{,}5 + 6 + 1} = \frac{14}{11{,}5} = \boxed{1{,}22\ m}$$

· Cálculo Q_x e Q_y

$$Q_x = \sum \bar{y} \cdot A = \boxed{14\ m}$$

$$Q_y = \sum \bar{x} A = \boxed{-4\ m}$$

4. Centroide por Integração

Quando uma superfície está limitada por curvas analíticas, as coordenadas do seu centroide são determinadas por integração.

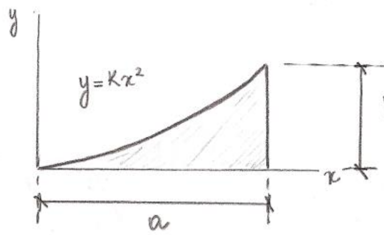
$$\boxed{\begin{aligned} Q_y &= \bar{x} A = \int \bar{x}_{el}\, dA \\ Q_x &= \bar{y} A = \int \bar{y}_{el}\, dA \end{aligned}}$$

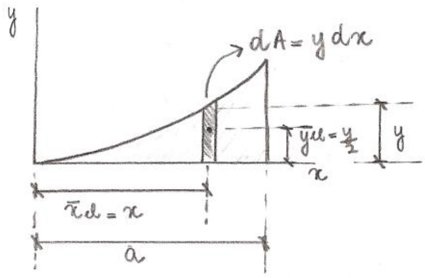
onde:

$\bar{x}_{el}$ = coordenada x do centroide do elemento de área dA.

$\bar{y}_{el}$ = coordenada y do centroide do elemento de área dA.

Exemplo 2. [5.4] Determine por integração direta a localização do centroide.





· Determinação de K

P/ $x = a$ e $y = b$

$$y = Kx^2 \qquad b = Ka^2 \;\rightarrow\; K = \frac{b}{a^2}$$

$$\therefore \quad y = \left(\frac{b}{a^2}\right) x^2 \quad e \quad x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{b}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = a\,\frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$$

• Cálculo do Q_y e Q_x

$$Q_y = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int_0^a x\, y\, dx$$

$$= \int_0^a x \left(\frac{b}{a^2}\right) x^2\, dx = \int_0^a \left(\frac{b}{a^2}\right) x^3\, dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^a = \frac{b}{\cancel{a^2}}\,\frac{a^4}{4} = \frac{a^2 \cdot b}{4}$$

$$\boxed{Q_y = \frac{a^2 \cdot b}{4}}$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} \cdot dA = \int_0^a \frac{y}{2}\, y\, dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}\, y^2\, dx = \int_0^a \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{a^2}\right) x^2\right]^2 dx$$

$$= \int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^4}\right) x^4\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a^4}\right)\frac{x^5}{5}\Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{\cancel{a^4}}\right)\frac{\cancel{a^5}}{5} = \frac{a\,b^2}{10}$$

$$\boxed{Q_x = \frac{a\,b^2}{10}}$$

• Cálculo da Área

$$A = \int dA = \int_0^a y\, dx = \int_0^a \left(\frac{b}{a^2}\right) x^2\, dx$$

$$= \left(\frac{b}{a^2}\right)\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \left(\frac{b}{\cancel{a^2}}\right)\frac{\cancel{a^3}}{3} = \frac{a\,b}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{a\,b}{3}}$$

• Cálculo $\bar{x}$ e $\bar{y}$

$$Q_y = \bar{x} \cdot A$$

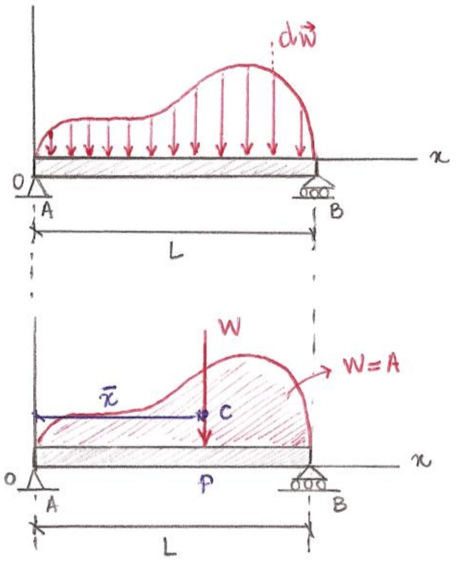
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{a^2 b}{4}}{\frac{ab}{3}} = \boxed{\frac{3a}{4}}$$

$$Q_x = \bar{y}\, A$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{ab^2}{10}}{\frac{ab}{3}} = \boxed{\frac{3b}{10}}$$

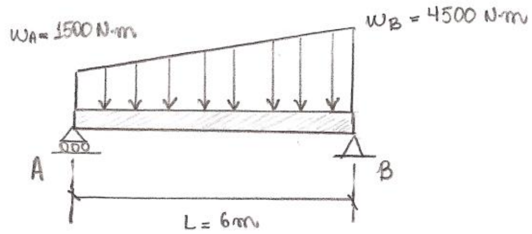
5. Cargas Distribuídas sobre Vigas

Para determinar as reações de apoio em uma viga com carga distribuída (w), substitui-se w por uma carga concentrada (W). Esta carga concentrada tem intensidade igual à área (A) sob a curva do carregamento e passa pelo centroide dessa área.

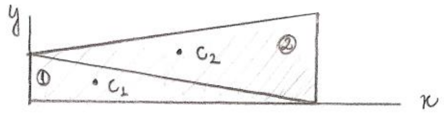


$$\boxed{W = \int dA = A}$$

Exemplo 3. Uma viga sustenta uma carga distribuída mostrada na figura. (a) Determine a carga concentrada equivalente. (b) Determine as reações de apoio.



• Cálculo da intensidade da carga concentrada.



$$W = A = A_1 + A_2$$

$$= \frac{b_1 \cdot h_1}{2} + \frac{b_2 \cdot h^2}{2} = \frac{6 \cdot 1500}{2} + \frac{4500 \cdot 6}{2}$$

$$= 4500 + 13500$$

$$\boxed{\vec{W} = 18\ KN\ (\downarrow)}$$

• Cálculo da posição de W

* W vai passar pelo centroide da área da figura.

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} A}{\Sigma A} = \frac{\bar{x}_1 \cdot A_1 + \bar{x}_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

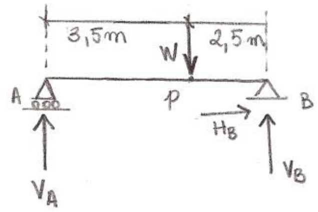
$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{b_1 \cdot h_1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} h\right) \cdot \left(\frac{b_2 h_2}{2}\right)}{\left(\frac{b_1 \cdot h_1}{2}\right) + \left(\frac{b_2 \cdot h_2}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3} \cdot 6\right)\left(\frac{6 \cdot 1500}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{4500 \cdot 6}{2}\right)}{\left(\frac{6 \cdot 1500}{2}\right) + \left(\frac{4500 \cdot 6}{2}\right)}$$

$$= \frac{(2 \cdot 4500) + (4 \cdot 13500)}{4500 + 13500}$$

$$\boxed{\bar{X} = 3{,}5m}$$

• Cálculo das reações de apoio



$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \oplus$

$\boxed{H_B = 0}$

$\Sigma M_A = 0 \quad \circlearrowleft \oplus$

$-1800 \cdot 3{,}5 + V_B \cdot 6 = 0$

$6 V_B = 6300$

$V_B = 1050\ N$

$\boxed{\vec{V}_B = 10{,}5\ KN\ (\uparrow)}$

$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow \oplus$

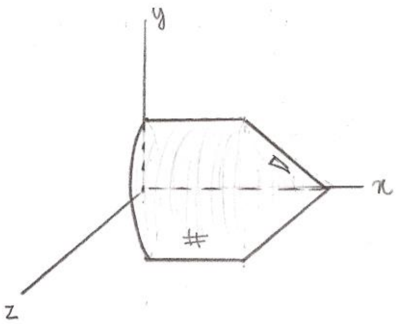
$V_A + V_B = 1800$

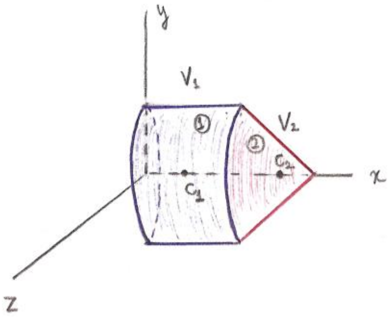
$V_A = 18000 - V_B$

$V_A = 18000 - 1050$

$V_A = 750 = \boxed{7{,}5\ KN\ \uparrow}$

6. Cargas Distribuídas sobre Vigas
Centro de Gravidade e Centroide





Centro de gravidade (CG.)

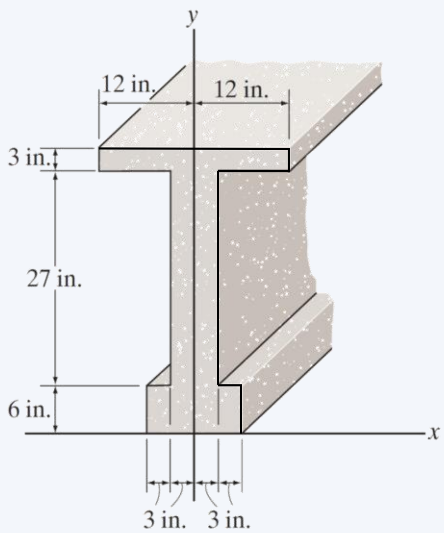
$$\boxed{\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} W}{\Sigma W}, \quad \bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} W}{\Sigma W} \quad e \quad \bar{Z} = \frac{\Sigma \bar{z} W}{\Sigma W}}$$

Centroide (C)

$$\boxed{\bar{X} = \frac{\sum \bar{x} \cdot V}{\sum V} \, , \quad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y} V}{\sum V} \quad e \quad \bar{Z} = \frac{\sum \bar{z} \cdot V}{\sum V}}$$

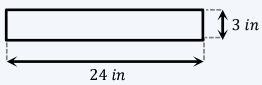
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine as coordenadas do centroide $(\bar{X}, \bar{Y})$ da seção transversal de uma viga de concreto representada na Figura abaixo.



- Seccionando a área da viga em três retângulo:

Retângulo 1:

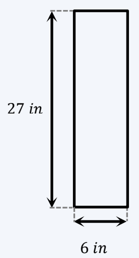


$\bar{x}_1 = 0$

$\bar{y}_1 = 6 + 27 + 1{,}5 = 34{,}5in$

Distância vertical do centroide da **área 1** até o eixo x

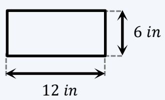
Retângulo 2:



$\bar{x}_2 = 0$

$\bar{y}_2 = 6 + \left(\frac{27}{2}\right) = 19{,}5in$

Retângulo 3:



$\bar{x}_3 = 0$

$\bar{y}_3 = \frac{6}{2} = 3in$

Obs.: Cada área possui uma coordenada $\bar{x}$ e $\bar{y}$. As coordenadas $\bar{x}$ são iguais a zero pois a distância horizontal do centroide das áreas seccionadas (área 1, área 2 e área 3) até o eixo y são iguais a zero.

Resolução pelo Método da Equação

$$\bar{X} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{X} = \frac{0 \cdot (24 \cdot 3) + 0 \cdot (6 \cdot 27) + 0 \cdot (12 \cdot 6)}{(24 \cdot 3) + (6 \cdot 27) + (12 \cdot 6)}$$

$$\boldsymbol{\bar{X} = 0} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\bar{Y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{Y} = \frac{34{,}5 \cdot (24 \cdot 3) + 19{,}5 \cdot (6 \cdot 27) + 3 \cdot (12 \cdot 6)}{(24 \cdot 3) + (6 \cdot 27) + (12 \cdot 6)}$$

$$\boldsymbol{\bar{Y} = 19{,}15\ in} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

Resolução pelo Método da Tabela

Comp.	$A(in^2)$	$\bar{x}(in)$	$\bar{y}(in)$	$\bar{x}A(in^3)$	$\bar{y}A(in^3)$
Ret.1	72	0	34,5	0	2484
Ret.2	162	0	19,5	0	3159
Ret.3	72	0	3	0	216
	$\sum A = 306$			$\sum \bar{x}A = 0$	$\sum \bar{y}A = 5859$

- Localização do Centroide:

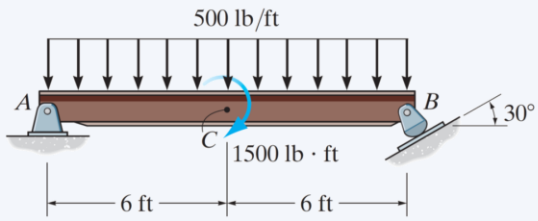
$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{0}{306} = 0$$

$$\boldsymbol{\bar{X} = 0} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

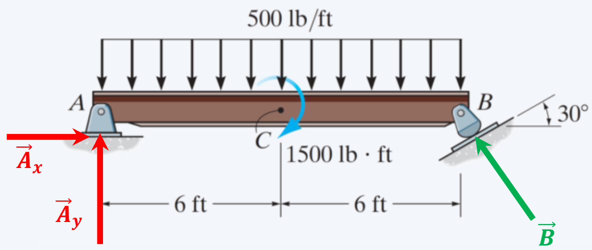
$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{5859}{306} = 19{,}15\ in$$

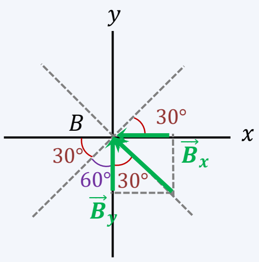
$$\boldsymbol{\bar{Y} = 19{,}15\ in} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

2. Determine a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída e as reações em $\boldsymbol{A}$ (articulação) e $\boldsymbol{B}$ (rolete).



- DCL:





- Carga concentrada fictícia:

Transformamos a carga distribuída em carga concentrada fictícia. Sabemos que a carga fictícia é numericamente igual a área da carga distribuída.

$$F = \acute{a}rea$$

$$F = 500 \cdot 12 = 6000\ lb$$

$$\boldsymbol{F = 6000\ lb} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Localização:

A carga concentrada fictícia está localizada no centroide da carga distribuída. Assim, determinando o valor de $\bar{X}$, saberemos a localização da concentrada fictícia.

$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\bar{x}_1 A_1}{A_1} = \frac{6 \cdot (12 \cdot 500)}{(12 \cdot 500)} = 6\ ft$$

$$\boldsymbol{\bar{X} = 6,00\ ft} \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Cálculo da reação $\vec{B}$:

$$\sum M_A = 0\ (\circlearrowleft)$$

$$Bcos30° \cdot 12 - 6000 \cdot 6 - 1500 = 0$$

$$B = 3608,44$$

$$\boldsymbol{\vec{B} = 3,608\ klb}\ (\nwarrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

- Cálculo de B_y e B_x:

$$B_x = B \cdot cos30° = 3608,44 \cdot cos30° = 3125\ lb$$

$$B_y = B \cdot sen30° = 3608,44 \cdot sen30° = 1804,22\ lb$$

- Cálculo de A_y e A_x:

$$\sum F_y = 0\ (\uparrow)$$

$$A_y - 600 + 1804,2 = 0$$

$$A_y = -4195,78\ lb$$

$$\boldsymbol{\vec{A}_y = 4,20\ klb}\ (\downarrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

$$\sum F_x = 0\ (\rightarrow)$$

$$A_x - B_x = 0$$

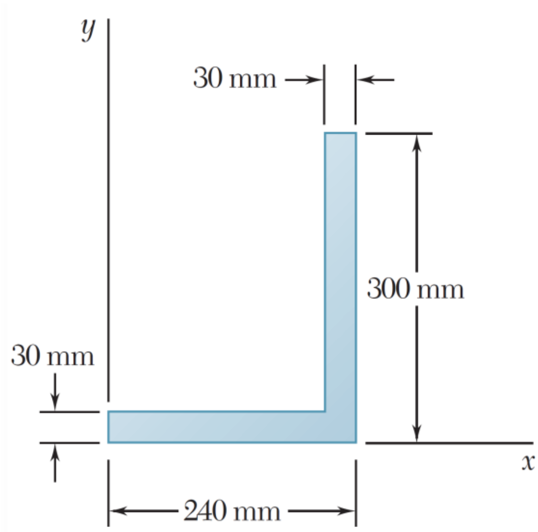
$$A_x = 3125\ lb$$

$$\boldsymbol{\vec{A}_x = 3,25\ klb}\ (\rightarrow) \qquad (\boldsymbol{RESPOSTA})$$

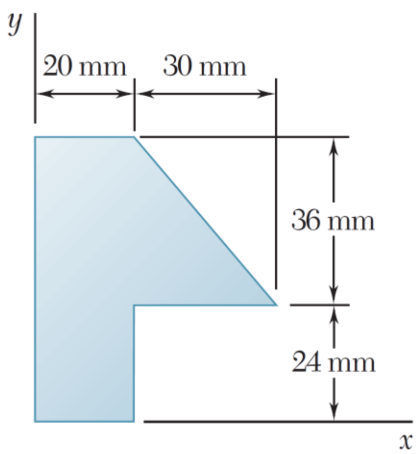
PROBLEMAS

Determine o centroide das áreas planas a seguir:

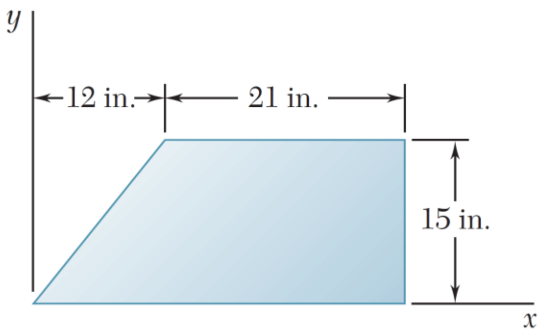
1.



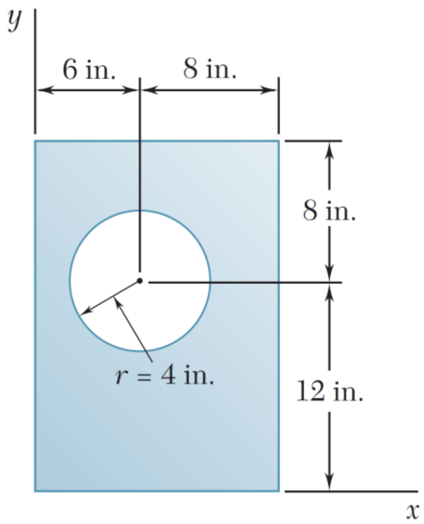
2.



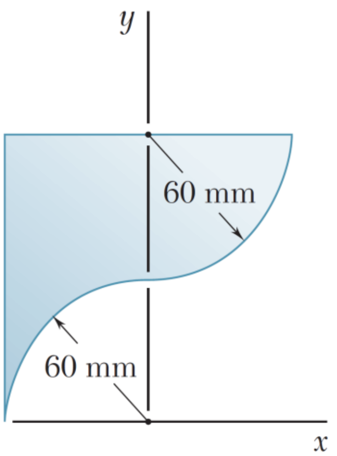
3.



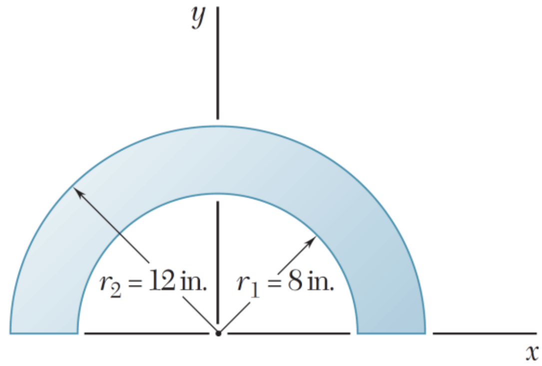
4.



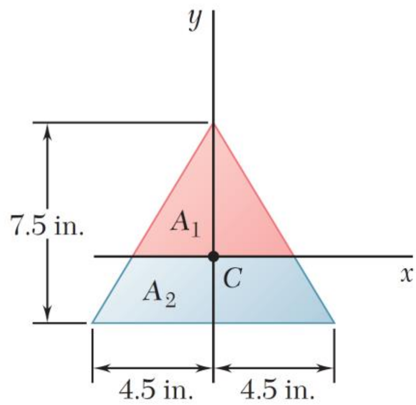
5.



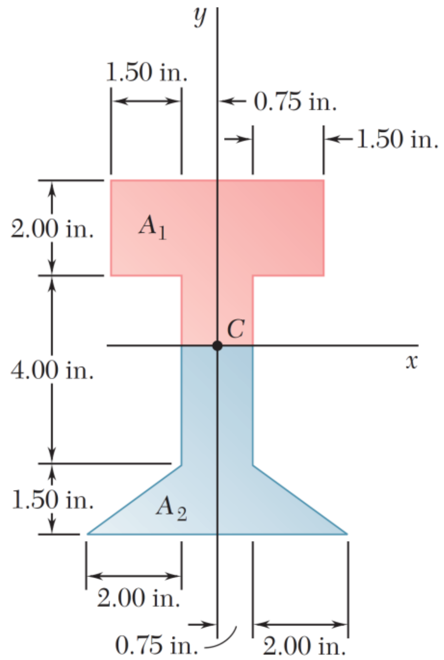
6.



7 e **8** O eixo horizontal passa pelo centroide C da área mostrada na Figura, e divida a superfície em duas áreas componentes, $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$. Determine o momento de primeira ordem de cada componente da superfície em relação ao eixo x e explique os resultados obtidos.

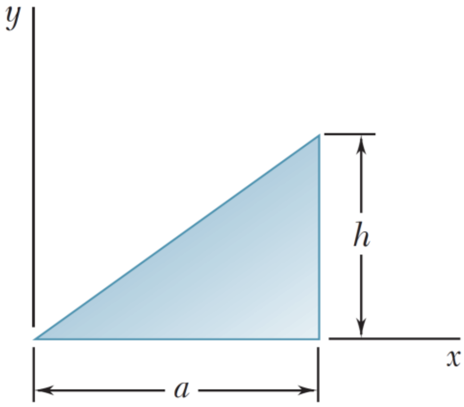


Exercício 7

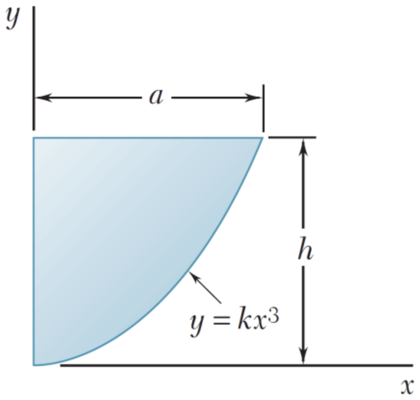


Exercício8

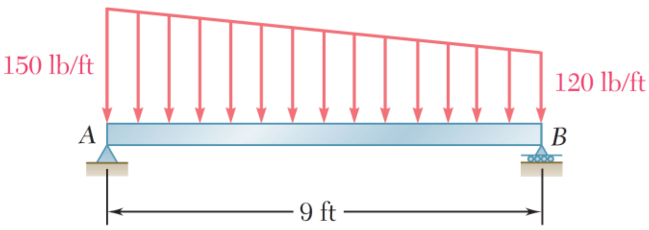
9. Determine por integração direta os centroides das áreas a seguir. Determine sua resposta em termos de a e h.



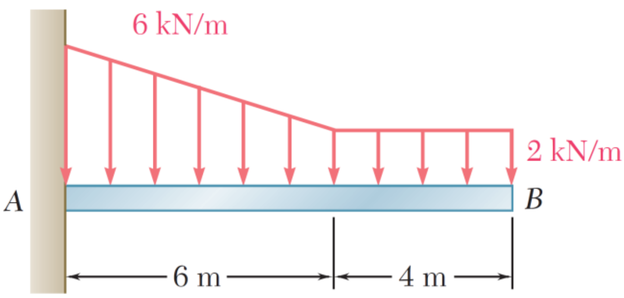
10.



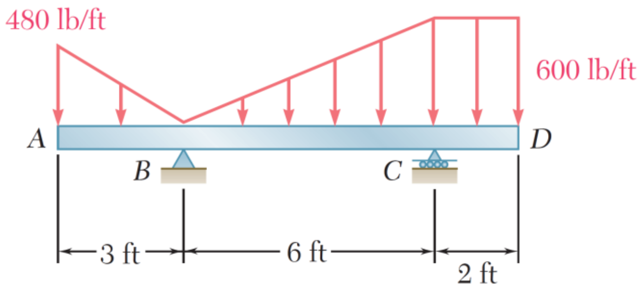
11. Para a viga e o carregamento mostrados nas Figuras, determine;*(a)* a intensidade e a localização da resultante da carga distribuída;*(b)*as reações de apoio da viga.



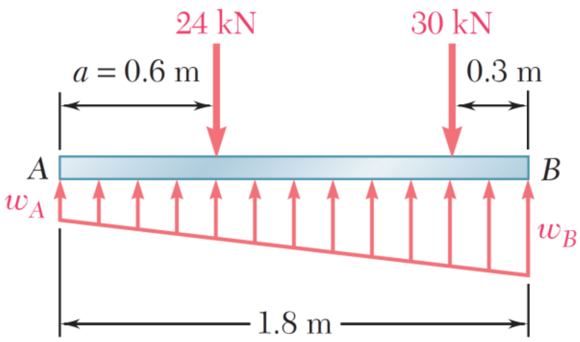
12. Determine as reações de apoio da viga para a carga dada.



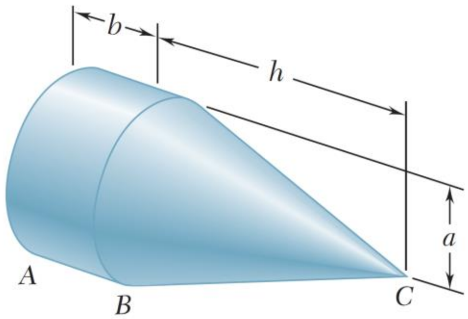
13.



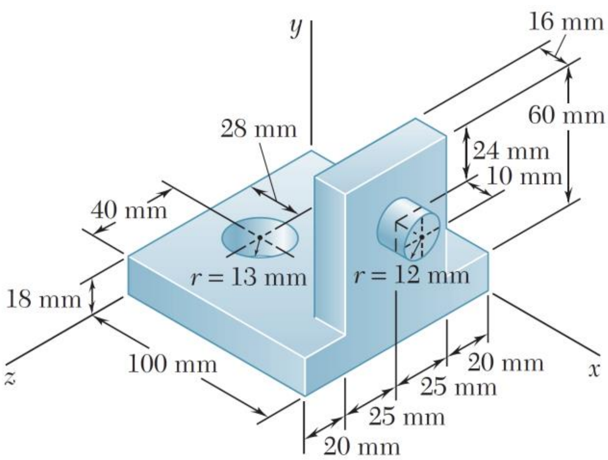
14. Para a viga mostrada na Figura abaixo, determine *(a)*a distância $\boldsymbol{a}$ para $\boldsymbol{\omega_A} = 20\ kN/m$, *(b)* o valor correspondente de $\boldsymbol{\omega_B}$.



15. Determine a posição do centroide do corpo composto mostrado na Figura, quando *(a)* $h = 2b$, *(b)*$h = 2{,}5b$.



16. Para o elemento mecânico mostrado na Figura, determine a coordenada y do centro de gravidade.



RESPOSTAS

1. $\overline{\boldsymbol{X}} = 175{,}6\ mm$ e $\overline{\boldsymbol{Y}} = 94{,}4\ mm$
2. $\overline{\boldsymbol{X}} = 16{,}21\ mm$ e $\overline{\boldsymbol{Y}} = 31{,}9mm$
3. $\overline{\boldsymbol{X}} = 19{,}28\ in$ e $\overline{\boldsymbol{Y}} = 6{,}94\ in$
4. $\overline{\boldsymbol{X}} = 7{,}22\ in$ e $\overline{\boldsymbol{Y}} = 9{,}56\ in$
5. $\overline{\boldsymbol{X}} = -10{,}00mm$ e $\overline{\boldsymbol{Y}} = 87{,}5\ mm$
6. $\overline{\boldsymbol{Y}} = 6{,}45\ in$
7. $(\boldsymbol{Q_x})_1 = 25,0\ in^3$, $(\boldsymbol{Q_x})_2 = -25,0\ in^3$ e $\boldsymbol{Q_x} = 0$
8. $(\boldsymbol{Q_x})_1 = 23,0\ in^3$, $(\boldsymbol{Q_x})_2 = -23,0\ in^3$ e $\boldsymbol{Q_x} = 0$
9. $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{2}{3}a$ e $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{3}h$
10. $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{2}{5}a$ e $\overline{\boldsymbol{y}} = \frac{4}{7}h$
11. $(a)\boldsymbol{R} = 1215\ lb\ (\downarrow)$, $\overline{\boldsymbol{X}} = 4{,}33\ ft$

    $(b)\boldsymbol{B} = 585\ lb(\uparrow)$e $\boldsymbol{A} = 630\ lb\ (\uparrow)$
12. $\boldsymbol{A} = 32{,}0\ kN\ (\uparrow)$, $\boldsymbol{M}_A = 124{,}0\ kN \cdot m\ (\circlearrowleft)$
13. $\boldsymbol{C} = 2360\ lb(\uparrow)$e $\boldsymbol{B} = 1360\ lb(\uparrow)$
14. $\boldsymbol{a} = 0{,}375\ m$ e $\boldsymbol{\omega_B} = 40{,}0\ kN/m$
15. $(a)\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{9}{10}b,\ \frac{1}{10}b\ a\ \boldsymbol{esquerda}\ da\ base\ do\ cone$,

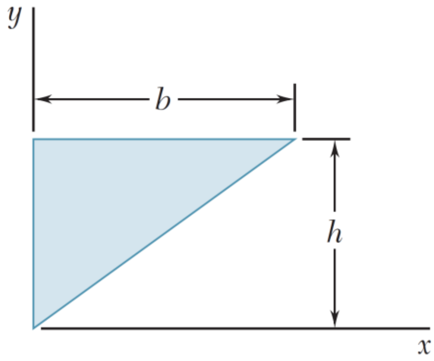
    $(b)0{,}01136b\ a\ \boldsymbol{direita}\ da\ base\ do\ cone.$
16. $\overline{\boldsymbol{Y}} = 19{,}13\ mm$

Capítulo 5 - Forças Distribuídas: Momento de Inércia

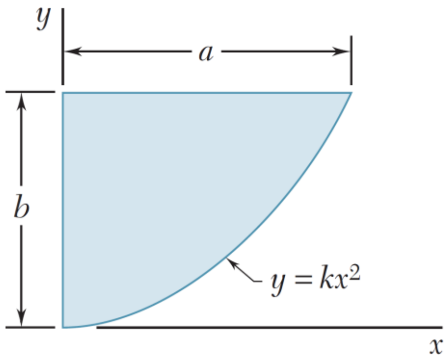
PROBLEMAS

Determine por integração direta o momento de inercia da superfície sombreada em relação ao eixo $\boldsymbol{y}$.

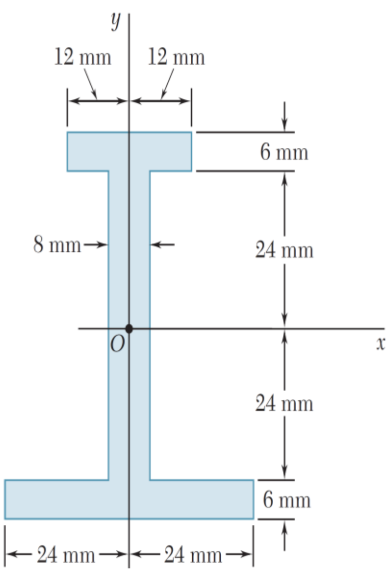
1.



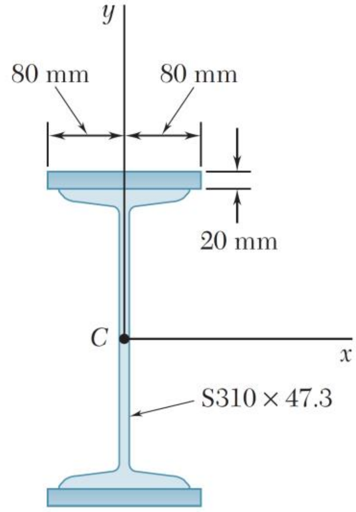
2.



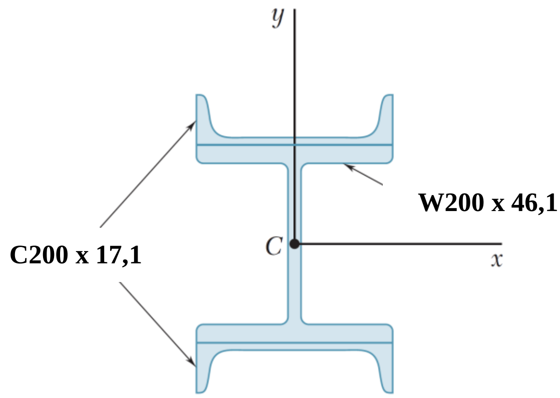
3. Determine o momento de inércia e o raio de giração da superfície sombreada em relação ao eixo $\boldsymbol{x}$.



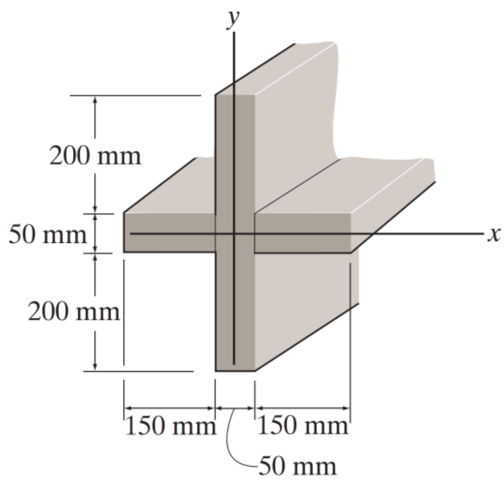
4. Duas chapas de aço de $20\ mm$ são soldadas a um perfil duplo $\boldsymbol{T}$ laminado, tal como mostra a Figura. Determine o momento de inércia e o raio de giração da seção em relação aos eixos $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.



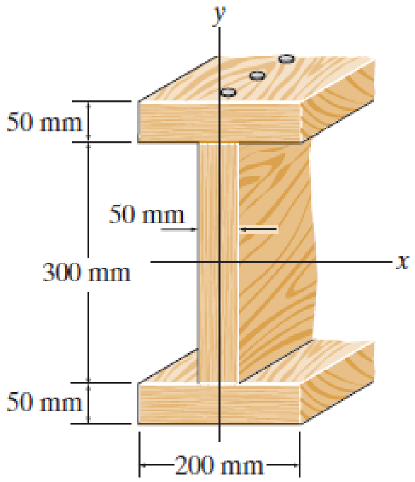
5. Dois perfis são soldados no perfil duplo $\boldsymbol{I}$ laminado como mostra a Figura. Determine o momento de inércia e o raio de giração da seção composta em relação aos eixos centroidais dos eixos $\boldsymbol{x}$e$\boldsymbol{y}$.



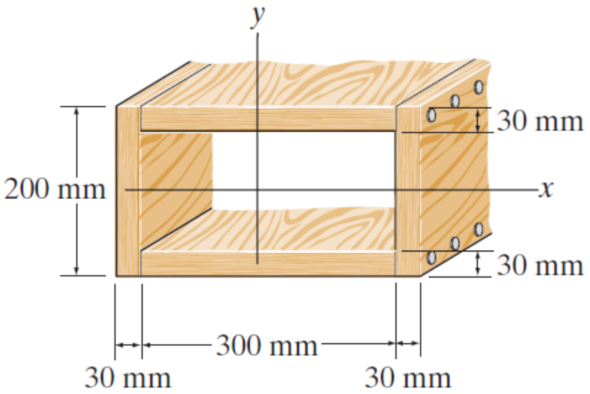
6. Determine o momento de inercia da área da seção transversal da viga em relação aos eixos centroidais $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.



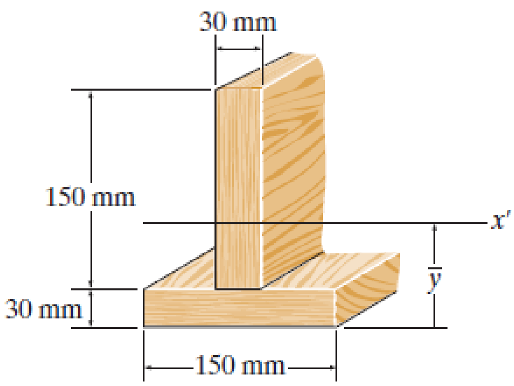
7. Determine o momento de inercia, da área da seção transversal da viga em relação ao eixo centroidal $\boldsymbol{y}$.



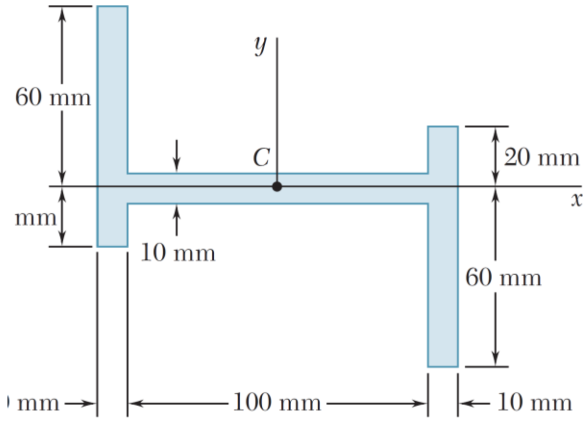
8. Determine o momento de inercia da área da seção transversal da viga em relação aos eixos centroidais $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.



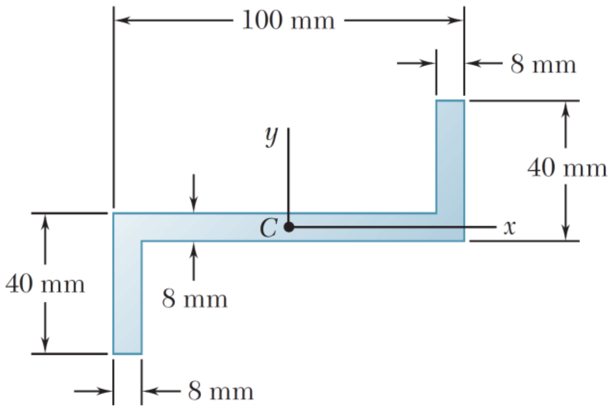
9. Determine o momento de inercia da área da seção transversal da viga $\boldsymbol{T}$ em relação aos eixos $\boldsymbol{x'}$ passando pelo centroide da seção transversal.



10. Usando o teorema dos eixos paralelos determine o produto de inércia da superfície mostrada em relação aos eixos centroidais x e y.



11. Usando o teorema dos eixos paralelos, determine o produto de inércia da superfície mostrada na Figura em relação aos eixos centroidais $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.



RESPOSTAS

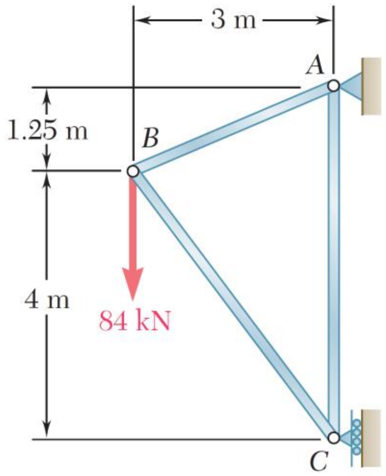
1. $\boldsymbol{I_y} = \frac{1}{12}b^3h.$
2. $\boldsymbol{I_y} = \frac{2}{15}a^3b.$
3. $\boldsymbol{I_x} = 390\cdot 10^3\ mm^4$ e $\boldsymbol{k_x} = 21{,}9\ mm.$
4. $\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{x}} = 260\cdot 10^6\ mm^4$ e $\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{x}} = 144{,}0\ mm,$
$\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{y}} = 17{,}53\cdot 10^6\ mm^4e\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{y}} = 37{,}6\ mm.$
5. $\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{x}} = 2{,}54\ in^4$ e $\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{x}} = 4{,}00\ in;$
$\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{y}} = 102{,}1\ in^4e\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{y}} = 2{,}54\ in.$
6. $\boldsymbol{I_x} = 383\cdot 10^6\ mm^4e\boldsymbol{I_y} = 186\cdot 10^6\ mm^4.$
7. $\boldsymbol{I_y} = 69{,}8\cdot 10^6\ mm^4$
8. $\boldsymbol{I_x} = 171\cdot 10^6\ mm^4e\boldsymbol{I_y} = 463\cdot 10^6\ mm^4$
9. $\boldsymbol{I_y} = 25{,}1\cdot 10^6\ mm^4$
10. $\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{xy}} = -1{,}760\cdot 10^6\ mm^4$
11. $\bar{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{xy}} = 471\cdot 10^3\ mm^4$

Capítulo 6 - Análises de Estruturas: Treliça

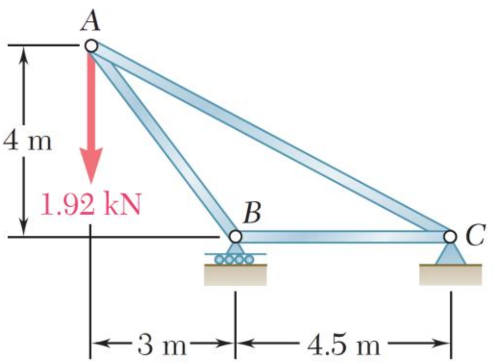
PROBLEMAS

Determine a força em cada elemento da treliça mostrada na Figura. Indique se cada elemento está sob **tração** ou sob **compressão**.

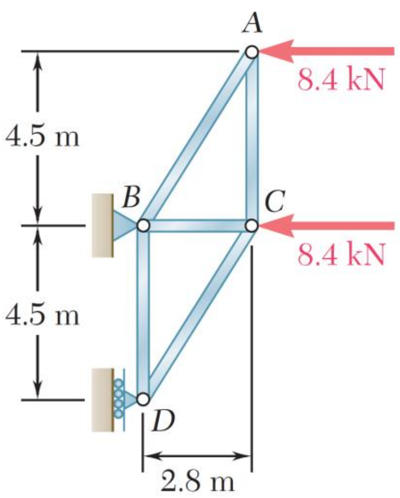
1.



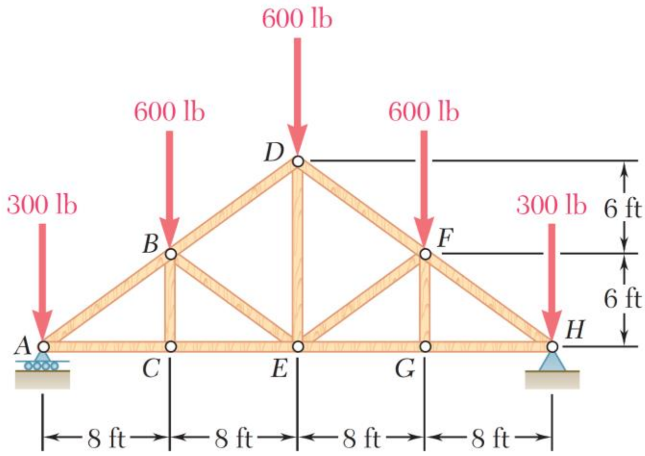
2.



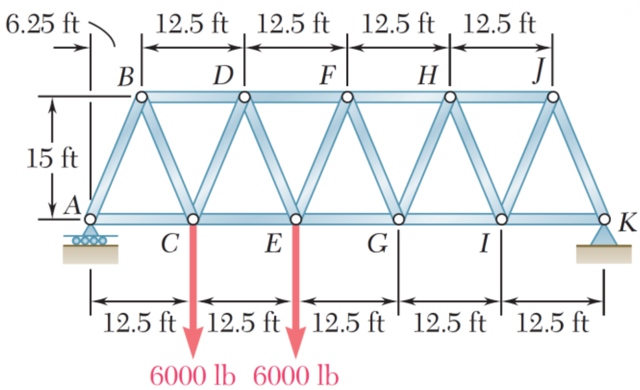
3.



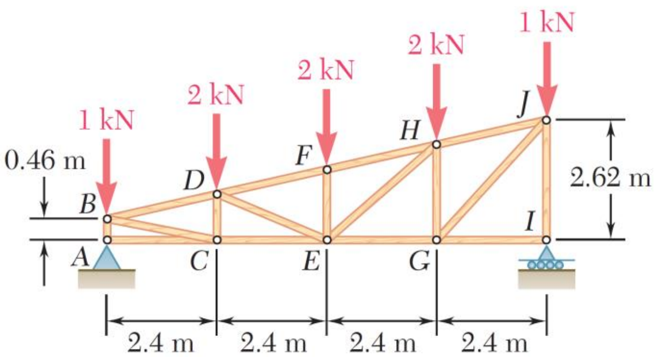
4. Determine a força em cada elemento da treliça de telhado Howet mostrado na Figura. Indique se cada elemento está sob **tração** ou sob **compressão.**



5. Uma treliça de ponte Warren é carregada tal como mostrada na Figura. Determine a força nos elementos CE, DE e DF.



6. Uma treliça de telhado de uma água é carregada tal como mostra a Figura. Determine a força nos elementos CE, DE e DF.



RESPOSTAS

1. $C = 48\ kN\ (\leftarrow)$

$\boldsymbol{A_x} = 48\ kN\ (\rightarrow)$

$\boldsymbol{A_y} = 84\ kN\ (\uparrow)$

$\boldsymbol{T_{AB}} = 52\ kN\ (T)$

$\boldsymbol{T_{AC}} = 64\ kN\ (T)$

$\boldsymbol{T_{BC}} = 80\ kN\ (C)$

2. $\boldsymbol{C_y} = 1{,}28\ kN\ (\downarrow)$

$\boldsymbol{B} = 3{,}20\ kN\ (\uparrow)$

$\boldsymbol{T_{AB}} = 4{,}00\ kN\ (C)$

$\boldsymbol{T_{BC}} = 2{,}40\ kN\ (C)$

3. $\boldsymbol{D} = 8{,}40\ kN\ (\leftarrow)$

$\boldsymbol{B_x} = 22{,}5\ kN\ (\rightarrow)$

$\boldsymbol{T_{AB}} = 15{,}90\ kN\ (C)$

$\boldsymbol{T_{AC}} = 13{,}50\ kN\ (T)$

$\boldsymbol{T_{CD}} = 15{,}90\ kN\ (T)$

$\boldsymbol{T_{BC}} = 16{,}80\ kN\ (C)$

$\boldsymbol{T_{BD}} = 13{,}50\ kN\ (C)$

4. $\boldsymbol{T_{AB}} = 1500\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{AC}} = 1200\ lb\ (T)$

$\boldsymbol{T_{CE}} = 1200\ lb\ (T)$

$\boldsymbol{T_{BC}} = 0$

$\boldsymbol{T_{BD}} = 1000\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{BE}} = 500\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{DF}} = 1000\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{DE}} = 600\ lb\ (T)$

$\boldsymbol{T_{EF}} = 500\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{EG}} = 1200\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{FG}} = 0$

$\boldsymbol{T_{FH}} = 1500\ lb\ (C)$

$\boldsymbol{T_{GH}} = 1200\ lb\ (T)$

5. $\boldsymbol{T_{CE}} = 800\ lb\ (T)$

$\boldsymbol{T_{DE}} = 2600\ lb\ (T)$

$\boldsymbol{T_{DF}} = 9000\ lb\ (C)$

6. $\boldsymbol{T_{CE}} = 7{,}20\ kN\ (T)$

$\boldsymbol{T_{DE}} = 1{,}047\ kN\ (C)$

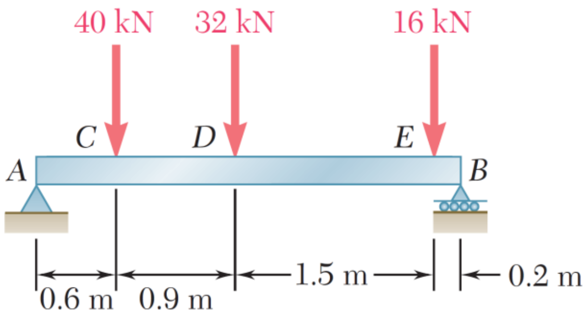
$\boldsymbol{T_{DF}} = 6{,}39\ kN\ (C)$

Capítulo 7 - Vigas

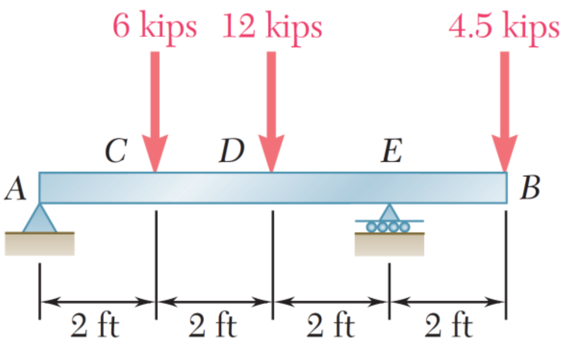
PROBLEMAS

Para a viga e o carregamento mostrados nas Figuras, *(a)* determine as reações de apoio, *(b)* trace os diagramas de **esforço cortante** e **momento fletor**.

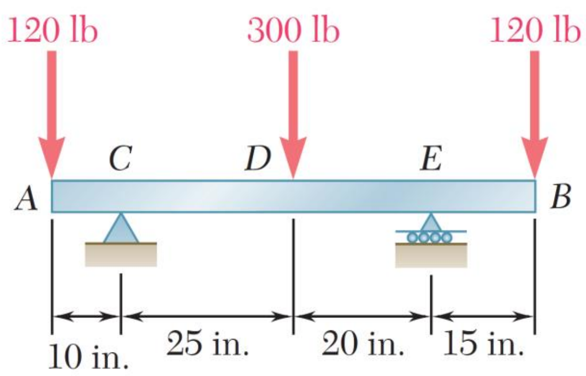
1.



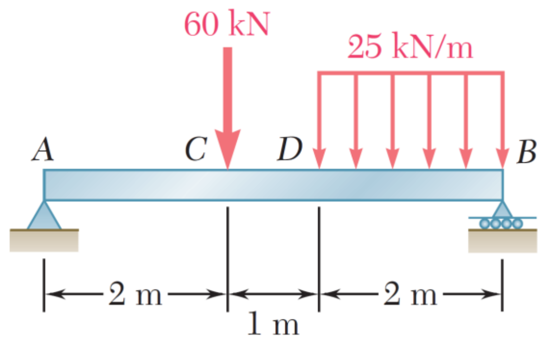
2.



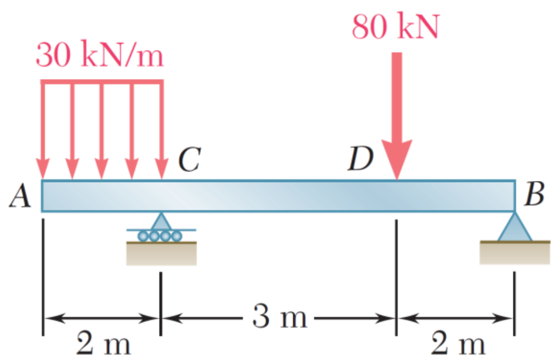
3.



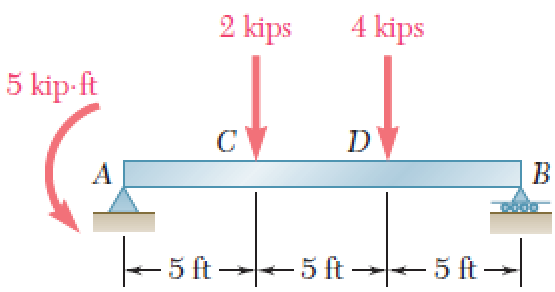
4.



5.

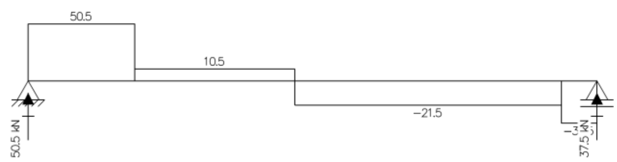


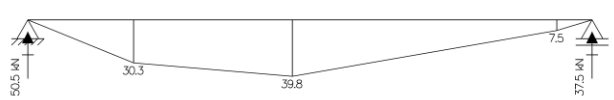
6. Para a viga e o carregamento mostrados nas Figuras, *(a)* determine as reações de apoio, *(b)* trace os diagramas de **esforço cortante** e **momento fletor**, *(c)* determine os valores absolutos máximos do esforço cortante e do momento fletor.



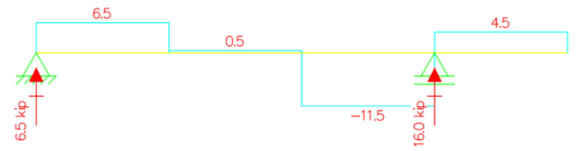
RESPOSTAS

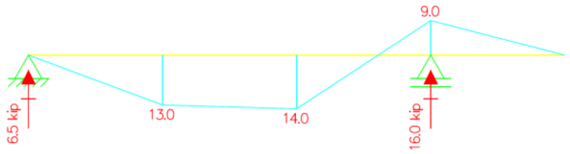
1. $\boldsymbol{A} = 50{,}5\ kN\ (\uparrow)$ e $\boldsymbol{B} = 37{,}5\ kN\ (\uparrow)$



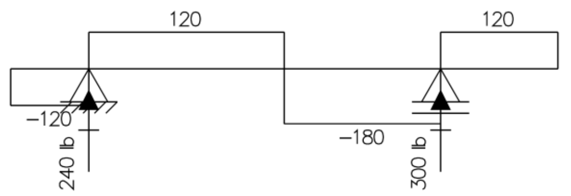


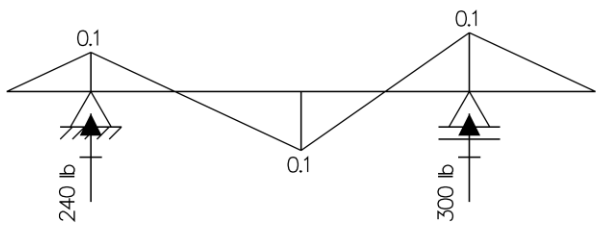
2. $\boldsymbol{A} = 6{,}50\ kpis\ (\uparrow)$ e $\boldsymbol{E} = 16{,}5\ kips\ (\uparrow)$



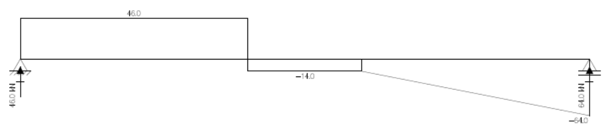


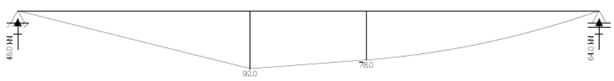
3. $\boldsymbol{C} = 240\ lb\ (\uparrow)$ e $\boldsymbol{E} = 300\ lb\ (\uparrow)$



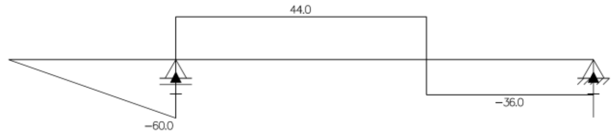


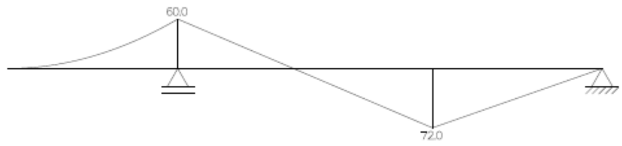
4. $\boldsymbol{A} = 46{,}0\ kN\ (\uparrow)$ e $\boldsymbol{B} = 64{,}0\ kN\ (\uparrow)$



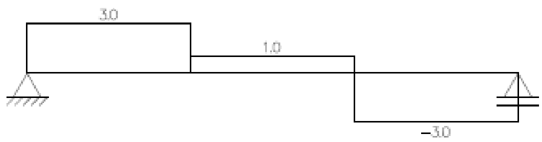


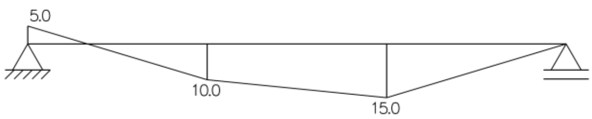
5. $\boldsymbol{C} = 104{,}0kN\ (\uparrow)$ e $\boldsymbol{B} = 36{,}0\ kN\ (\uparrow)$





6. $\boldsymbol{A_Y} = 3{,}00\ kips\ (\uparrow)$



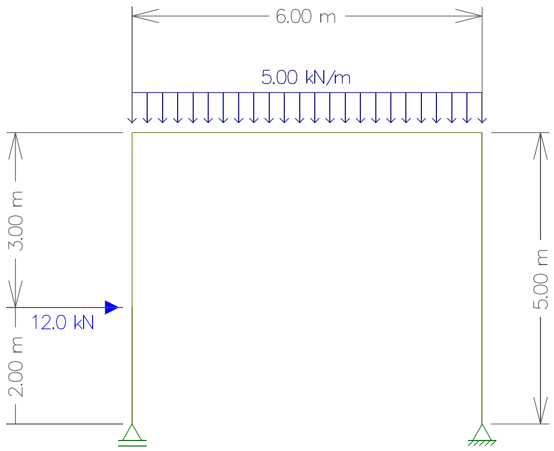


Capítulo 8 – Pórticos

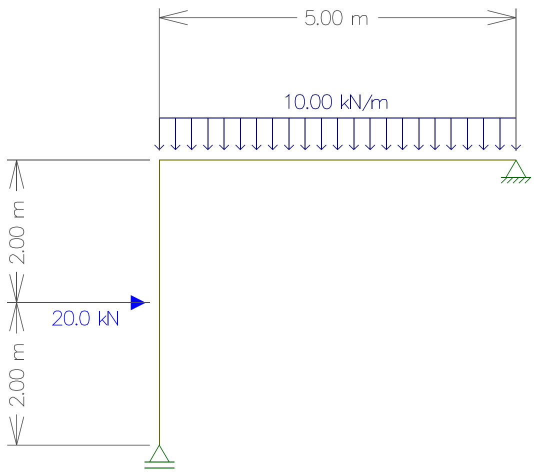
PROBLEMAS

Para os pórticos mostrados nas Figuras:*(a)* Para os pórticos mostrados nas figuras, *(a)* determine as reações de apoio, *(b)* trace os diagramas dos esforções solicitantes.

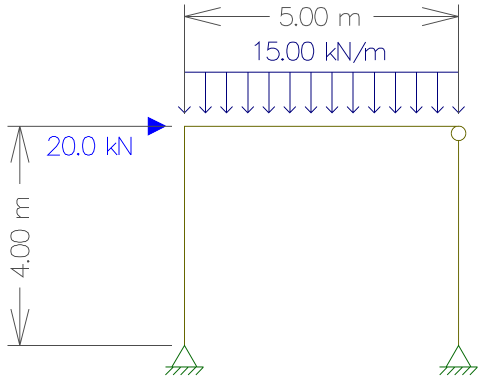
1.



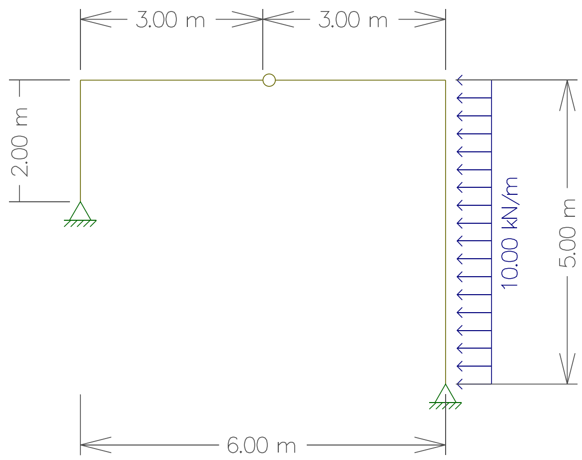
2.



3.

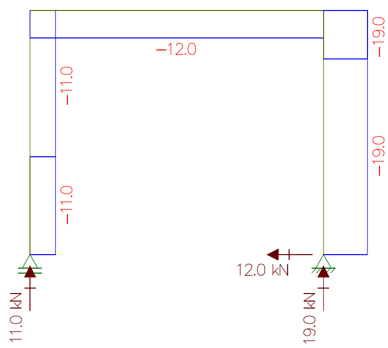


4.

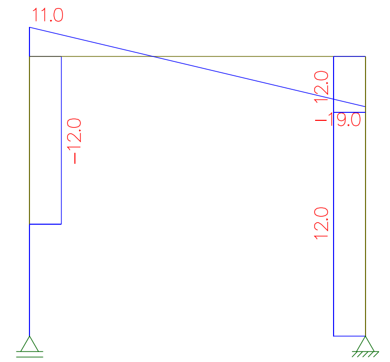


RESPOSTAS

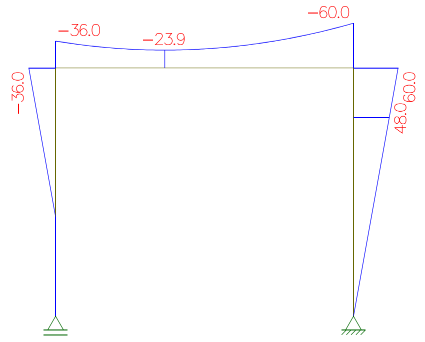
1.



D.E.N

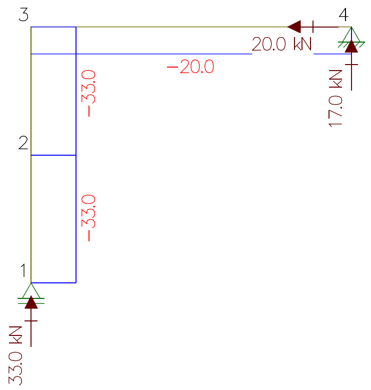


D.E.C

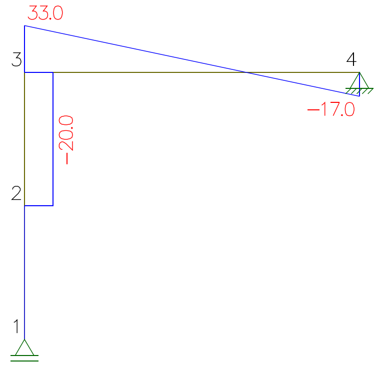


D.M.F

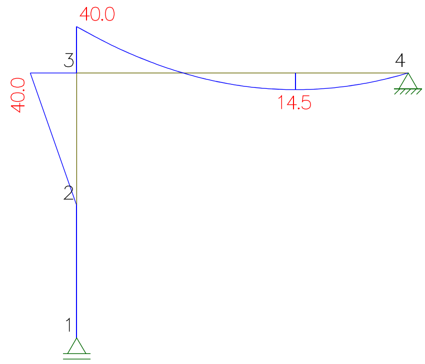
2.



D.E.N

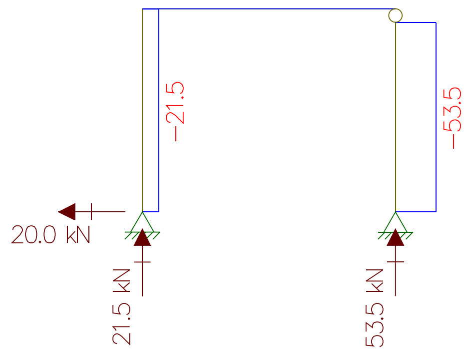


D.E.C

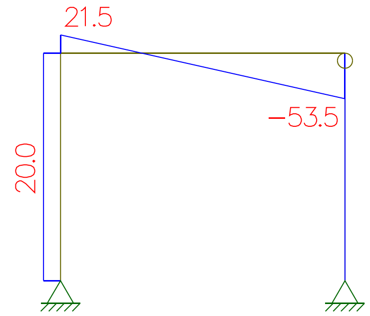


D.M.F

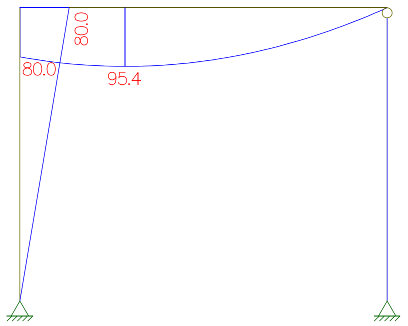
3.



D.E.N

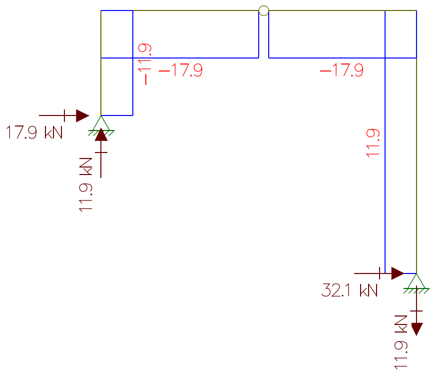


D.E.C

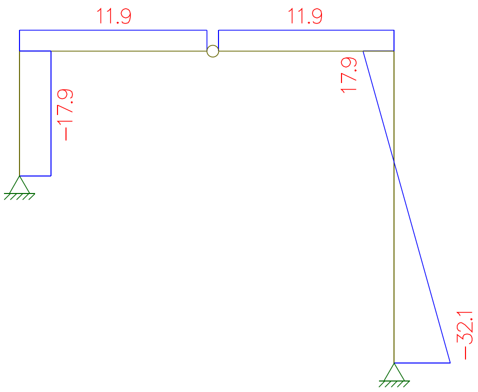


D.M.F

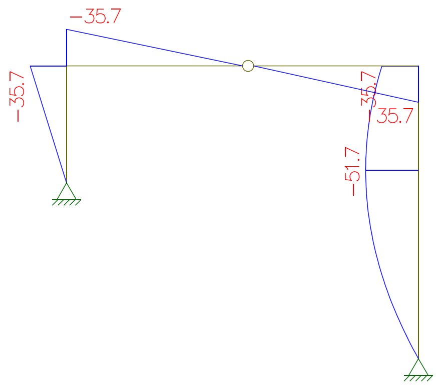
4.


11.9
−17.9
−17.9
17.9 kN
11.9 kN
11.9
32.1 kN
11.9 kN

D.E.N


11.9
11.9
−17.9
17.9
−32.1

D.E.C

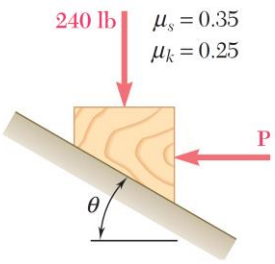

−35.7
−35.7
35.7
35.7
−51.7

D.M.F

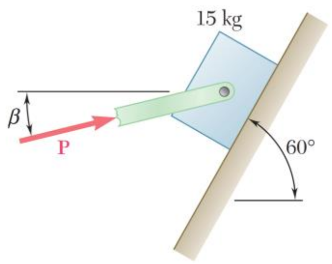
Capítulo 9 - Atrito

PROBLEMAS

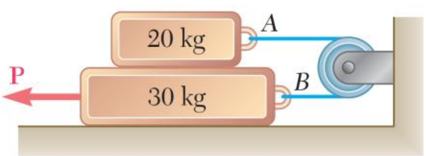
1. Determine se o bloco mostrado na figura está em equilíbrio e encontre a intensidade e o sentido da força de atrito quando $\theta = 25°$ e $P = 150\ lb$.



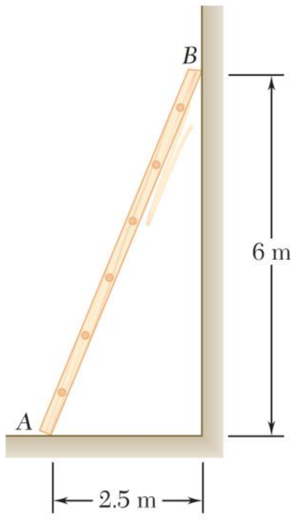
2. Sabe-se que o coeficiente de atrito entre o bloco de $m = 15\ kg$ e o plano inclinado é $\mu_s = 0{,}25$, determine *(a)* o menor valor de P necessário para manter o bloco em equilíbrio, *(b)* o valor correspondente de β.



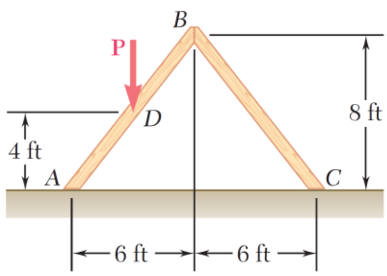
3. Os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$ entre todas as superfícies de contato. Determine a menor força $\boldsymbol{P}$ necessária para iniciar o movimento do bloco de $m = 30\ kg$ se o cabo AB *(a)* está ligado tal qual como mostra a figura, *(b)* é removido.



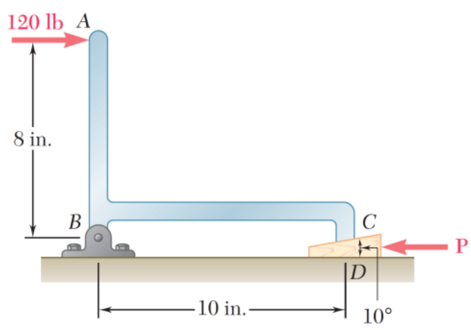
4. Uma escada AB de $6{,}5\ m$ encosta-se em uma parede como mostrado na figura. Considerando que o coeficiente de atrito estático μ_s é o mesmo para A e B, determine o menor valor de μ_s para que o equilíbrio seja mantido.



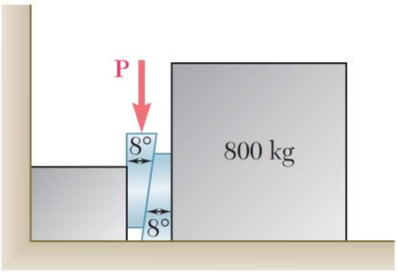
5. Duas tábuas uniformes idênticas, cada qual pesando $40\ lb$, estão temporariamente encostadas uma contra a outra tal como mostra a figura. Sabe-se que o coeficiente de atrito estático entre todas as superfícies é $0{,}40$, determine *(a)* a maior intensidade da força $\boldsymbol{P}$ para que o equilíbrio seja mantido, *(b)* a superfície em que o movimento e iminente.



6. A peça ABC é sustentada por uma articulação sem atrito em B e por uma cunha de $10°$ em C. Sabendo que o coeficiente de atrito estático $0{,}20$ em ambas as faces da cunha, determine *(a)* a força $\boldsymbol{P}$ necessária para mover a cunha para esquerda, *(b)* os componentes da reação correspondente em B.



7. Duas cunhas de $8°$ e massa desprezível são usadas para mover e posicionar uma bloco de $m = 800\ kg$. Sabendo que o coeficiente de atrito estático em todas as superfícies de contato e de 0,30, determine a menor força $\boldsymbol{P}$ que poderá ser aplicada, como mostrado na figura na cunha da esquerda.



RESPOSTAS

1. $O\ bloco\ está\ em\ equilíbrio\ \boldsymbol{F} = 34{,}5\ lb\ (\searrow)$
2. $P = 108{,}0\ N$ e $\beta = 46{,}0°$
3. $(a)\ \ \boldsymbol{P} = 353\ N\ (\leftarrow)$

   $(b)\ \boldsymbol{P} = 196{,}2\ N\ (\leftarrow)$
4. $\mu_s = 0{,}200$
5. $(a)\ \ P_{máx} = 11{,}43\ lb$

   $(b)\ em\ C$
6. $(a)\ \ \boldsymbol{P} = 56{,}6\ lb\ (\leftarrow)$

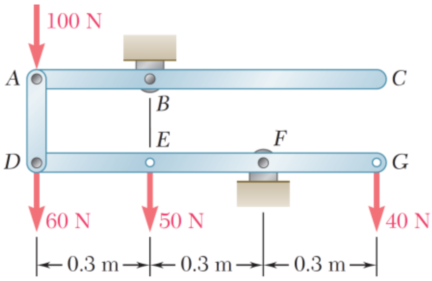
   $(b)\ \boldsymbol{B_x} = 82{,}6\ lb\ (\leftarrow)$ e $\boldsymbol{B_y} = 96{,}0\ lb\ (\downarrow)$
7. $\boldsymbol{P} = 2080\ N\ (\downarrow)$

Capítulo 10 - Método do Trabalho Virtual

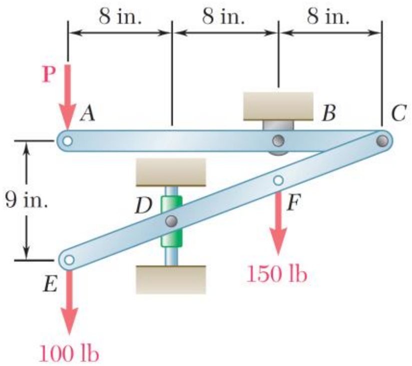
PROBLEMAS

1. Determine a força vertical $\boldsymbol{P}$ que deve ser aplicada em C para se manter o equilíbrio do sistema articulado.

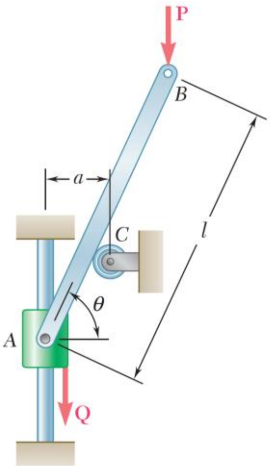
2. Determine o binário $\boldsymbol{M}$ que deve ser aplicado ao elemento ABC para se manter em equilíbrio do sistema articulado.



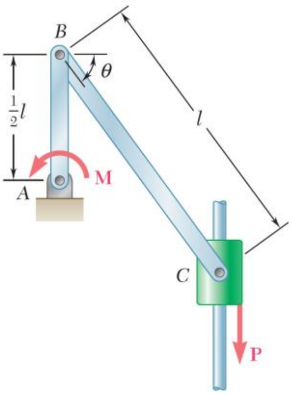
3. O mecanismo articulado de duas barras mostrado na figura é sustentado por um pino e um suporte em B e por um colar em D, que desliza livremente sobre uma haste vertical. Determine a força $\boldsymbol{P}$ necessária para manter o equilíbrio do mecanismo.



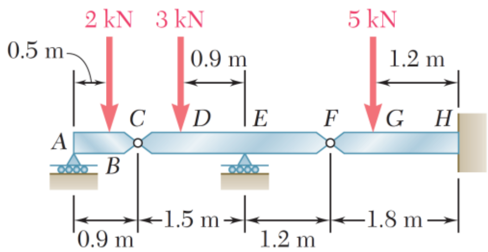
4. A haste fina AB é presa a um colar A e repousa sobre uma pequena roda em C. Desprezando o raio da roda e o efeito do atrito, deduza uma expressão para intensidade da força $\boldsymbol{Q}$ necessária para manter o equilíbrio da haste.



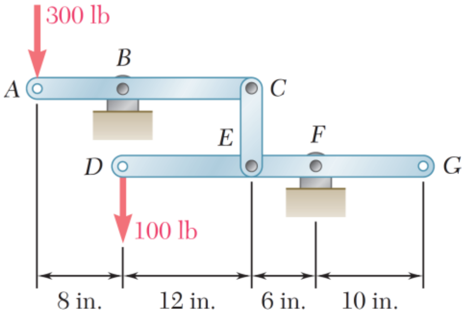
5. Deduza uma expressão para a intensidade do binário $\boldsymbol{M}$ necessário para manter o equilíbrio do mecanismo articulado mostrado na figura.



6. Usando o método do trabalho virtual, determine a reação em E.



7. Determine a força vertical $\boldsymbol{P}$ que deve ser aplicada em G para se manter o equilíbrio do sistema articulado



RESPOSTAS

1. $\boldsymbol{P} = 82{,}5\ N\ (\downarrow)$
2. $\boldsymbol{M} = 49{,}5\ N \cdot m\ (\curvearrowright)$
3. $\boldsymbol{P} = 125{,}0\ lb\ (\downarrow)$
4. $Q = P\left(\frac{l}{a}cos^3\theta - 1\right)$
5. $M = \frac{Pl}{2tan\theta}$
6. $\boldsymbol{E} = 7{,}75\ kN\ (\uparrow)$
7. $P = 60{,}0\ lb$

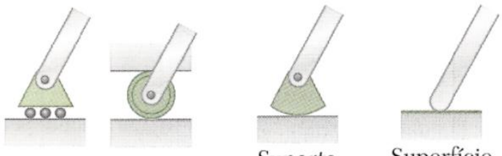
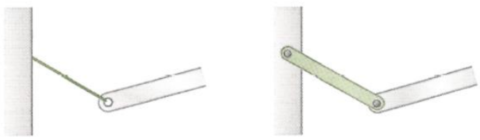
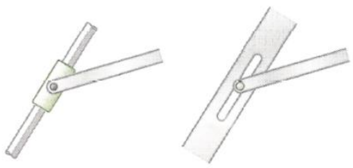
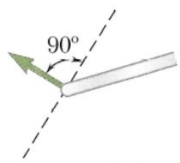
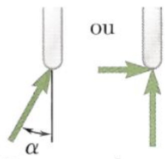
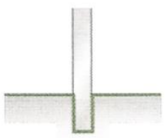
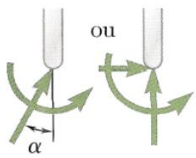
Referências

BEER, F.P.; JOHNSTON J. E.R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros – Estática**. 9ª edição. Porto Alegre: AMGH, 2012.

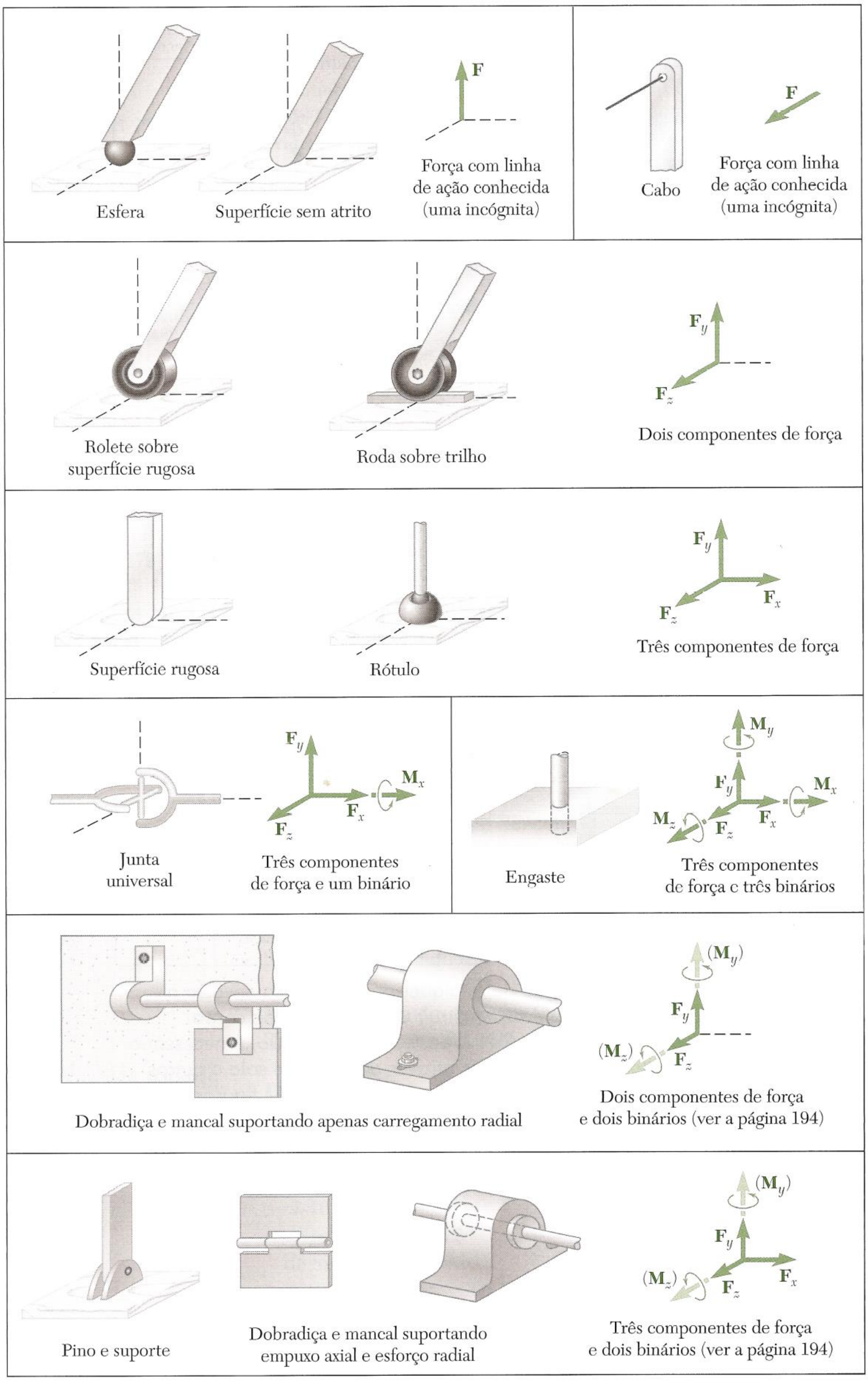
HIBBERLER, R.C. **Mecânica para Engenharia – Estática**. 12ª ed. São Paulo: Person Prentice Hall, 2011.

Apêndice

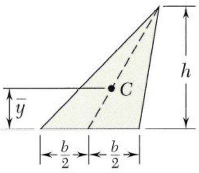
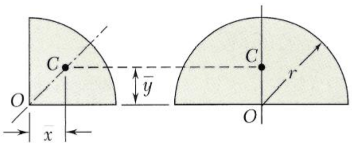
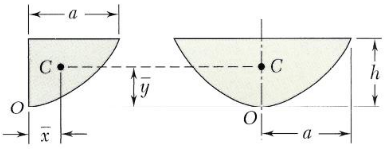
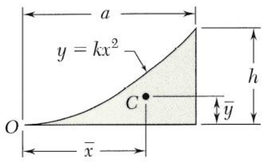
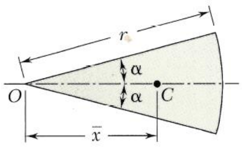
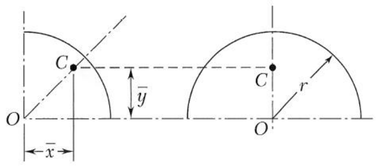
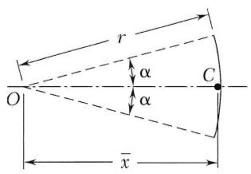
Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Bidimensional

Apoio ou Conexão	Reação	Número de incógnitas
 Roletes; Suporte basculante; Superfície sem atrito	 Força com linha de ação conhecida	1
 Cabo curto; Haste curta	 Força com linha de ação conhecida	1
 Cursor sobre haste sem atrito; Pino deslizante sem atrito	 Força com linha de ação conhecida	1
 Pino sem atrito ou articulação; Superfície rugosa	 Força com direção desconhecida	2
 Engaste	 Força e binário	3

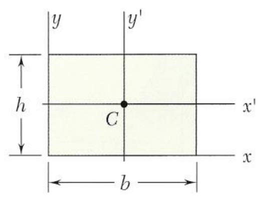
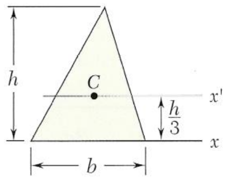
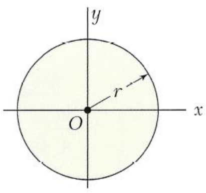
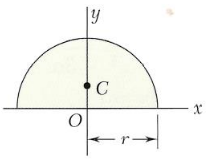
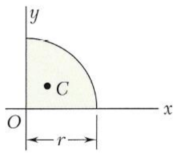
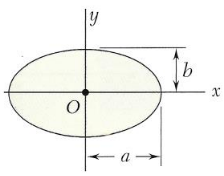
Reações em Apoios e Conexões para uma Estrutura Tridimensional

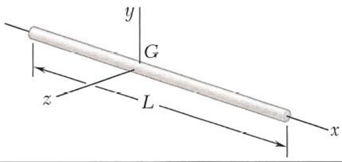
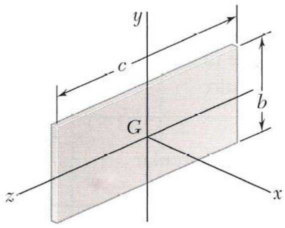
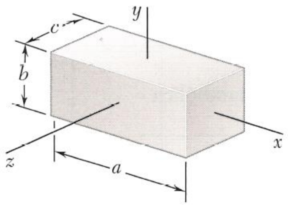
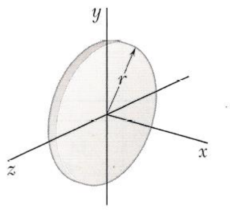
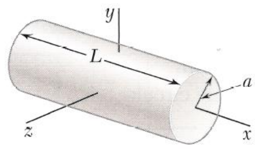
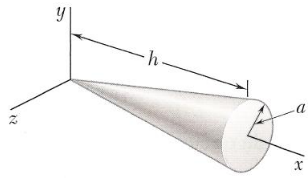
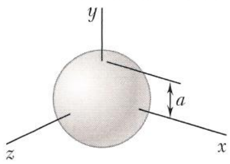


Centroides de Áreas e Linhas de Formatos Comuns

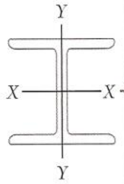
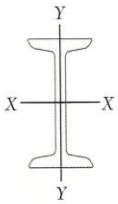
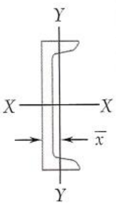
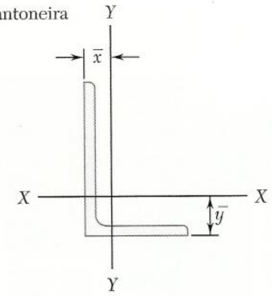
Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Área sob arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

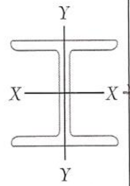
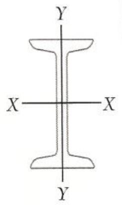
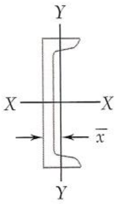
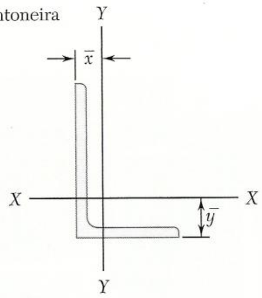
Momentos de Inercia de Áreas e Sólidos Comuns

Retângulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	
Triângulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	
Círculo $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	
Semicírculo $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$	
Quarto de círculo $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$	
Elipse $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$	

Barra esbelta $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
Placa retangular delgada $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
Prisma retangular $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
Disco delgado $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$	
Cilindro circular $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$	
Cone circular $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$	
Esfera $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$	

Propriedades de Perfis Laminados

	Designação	Área mm²	Altura mm	Largura mm	Eixo X-X $\bar{I}_x$ 10^6 mm⁴	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	Eixo Y-Y $\bar{I}_y$ 10^6 mm⁴	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
Perfil I 	W460 × 113[1]	14.400	462	279	554	196		63,3	66,3	
	W410 × 85	10.800	417	181	316	171		17,9	40,6	
	W360 × 57,8	7.230	358	172	160	149		11,1	39,4	
	W200 × 46,1	5.880	203	203	45,8	88,1		15,4	51,3	
Perfil duplo T 	S460 × 81,4[1]	10.300	457	152	333	180		8,62	29,0	
	S310 × 47,3	6.010	305	127	90,3	123		3,88	25,4	
	S250 × 37,8	4.810	254	118	51,2	103		2,80	24,1	
	S150 × 18,6	2.360	152	84,6	9,16	62,2		0,749	17,8	
Perfil C 	C310 × 30,8[1]	3.920	305	74,7	53,7	117		1,61	20,2	17,7
	C250 × 22,8	2.890	254	66,0	28,0	98,3		0,945	18,1	16,1
	C200 × 17,1	2.170	203	57,4	13,5	79,0		0,545	15,8	14,5
	C150 × 12,2	1.540	152	48,8	5,45	59,4		0,286	13,6	13,0
Cantoneira 	L152 × 152 × 25,4[2]	7100			14,7	45,5	47,2	14,7	45,5	47,2
	L102 × 102 × 12,7	2420			2,30	30,7	30,0	2,30	30,7	30,0
	L76 × 76 × 6,4	929			0,512	23,5	21,2	0,512	23,5	21,2
	L152 × 102 × 12,7	3060			7,20	48,5	50,3	2,59	29,0	24,9
	L127 × 76 × 12,7	2420			3,93	40,1	44,2	1,06	20,9	18,9
	L76 × 51 × 6,4	768			0,454	24,2	24,9	0,162	14,5	12,4

	Designação	Área mm²	Altura mm	Largura mm	Eixo X-X $\bar{I}_x$ 10^6 mm⁴	Eixo X-X $\bar{k}_x$ mm	Eixo X-X $\bar{y}$ mm	Eixo Y-Y $\bar{I}_y$ 10^6 mm⁴	Eixo Y-Y $\bar{k}_y$ mm	Eixo Y-Y $\bar{x}$ mm
Perfil I 	W460 × 113[1]	14.400	462	279	554	196		63,3	66,3	
	W410 × 85	10.800	417	181	316	171		17,9	40,6	
	W360 × 57,8	7.230	358	172	160	149		11,1	39,4	
	W200 × 46,1	5.880	203	203	45,8	88,1		15,4	51,3	
Perfil duplo T 	S460 × 81,4[1]	10.300	457	152	333	180		8,62	29,0	
	S310 × 47,3	6.010	305	127	90,3	123		3,88	25,4	
	S250 × 37,8	4.810	254	118	51,2	103		2,80	24,1	
	S150 × 18,6	2.360	152	84,6	9,16	62,2		0,749	17,8	
Perfil C 	C310 × 30,8[1]	3.920	305	74,7	53,7	117		1,61	20,2	17,7
	C250 × 22,8	2.890	254	66,0	28,0	98,3		0,945	18,1	16,1
	C200 × 17,1	2.170	203	57,4	13,5	79,0		0,545	15,8	14,5
	C150 × 12,2	1.540	152	48,8	5,45	59,4		0,286	13,6	13,0
Cantoneira 	L152 × 152 × 25,4[2]	7100			14,7	45,5	47,2	14,7	45,5	47,2
	L102 × 102 × 12,7	2420			2,30	30,7	30,0	2,30	30,7	30,0
	L76 × 76 × 6,4	929			0,512	23,5	21,2	0,512	23,5	21,2
	L152 × 102 × 12,7	3060			7,20	48,5	50,3	2,59	29,0	24,9
	L127 × 76 × 12,7	2420			3,93	40,1	44,2	1,06	20,9	18,9
	L76 × 51 × 6,4	768			0,454	24,2	24,9	0,162	14,5	12,4